

Welk pad is het snelst?

Van kleurrijke regenbogen tot de werking van het menselijk oog: lichtbreking is alom aanwezig. Met behulp van een strandwacht en een zwemmer in nood bespreek ik in dit artikel waarom lichtstralen gebroken worden: licht neemt altijd de snelste route. Dit principe - dat als eerste door de wiskundige Pierre de Fermat werd geopperd - blijkt veel algemener toepasbaar, en geeft aanleiding tot een volledig nieuwe kijk op de natuurkunde, waaronder een inkijkje in de quantumwereld.

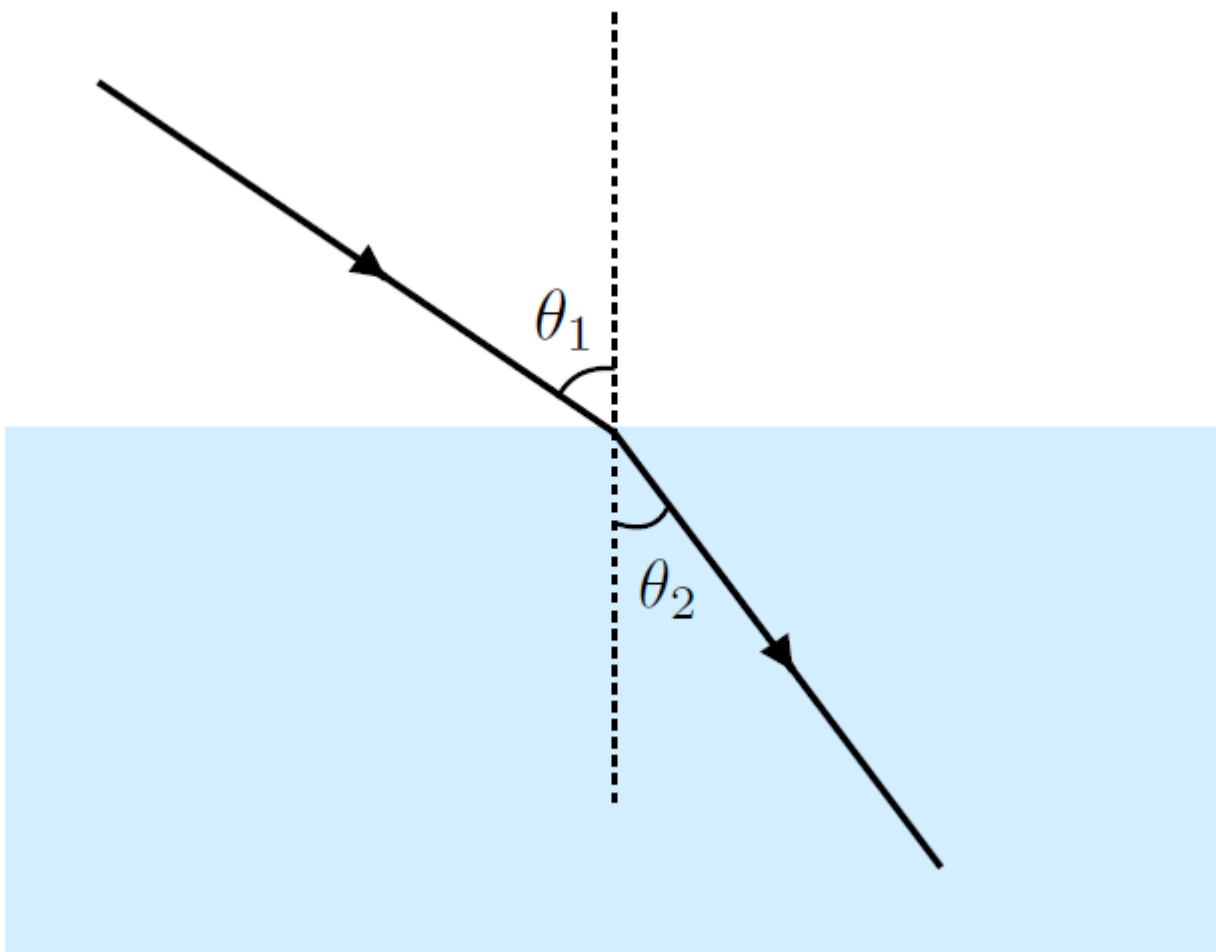


Afbeelding 1. Breking. Kleurschifting door de breking van een lichtstraal. Foto via [Pigsels](#).

Lichtbreking en regenbogen

De breking van licht, ook wel *refractie* genoemd, is het verschijnsel dat lichtstralen van

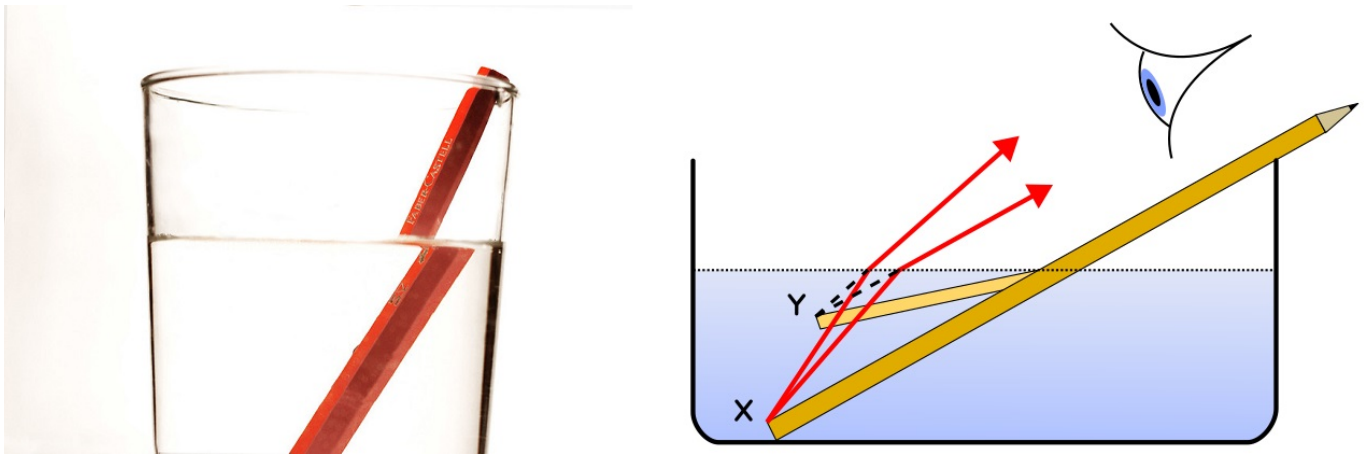
richting veranderen zodra ze van de ene doorzichtige stof in de andere terechtkomen. Zo'n doorzichtige stof – denk hierbij bijvoorbeeld aan lucht, water of glas – wordt een *medium* genoemd. Hoe groot de richtingsverandering is, hangt af van het soort medium (dit wordt uitgedrukt in termen van de [brekingsindex](#) van het materiaal), en van de hoek waarmee de lichtstraal op het oppervlak valt. In afbeelding 2 is de breking van een lichtstraal weergegeven. Daarin is te zien dat de hoek van inval en de hoek van breking in het algemeen niet gelijk zijn. Wel geldt: hoe groter de invalshoek, des te groter de brekingshoek. De precieze formule die het verband aangeeft tussen de invalshoek en de brekingshoek wordt de [Wet van Snellius](#) genoemd.



Afbeelding 2: Breking in een diagram. De breking van een lichtstraal bij een overgang tussen twee stoffen, hier aangegeven met wit en blauw. De invalshoek θ_1 en de brekingshoek θ_2 zijn niet over het algemeen niet gelijk: de richting van de lichtstraal verandert.

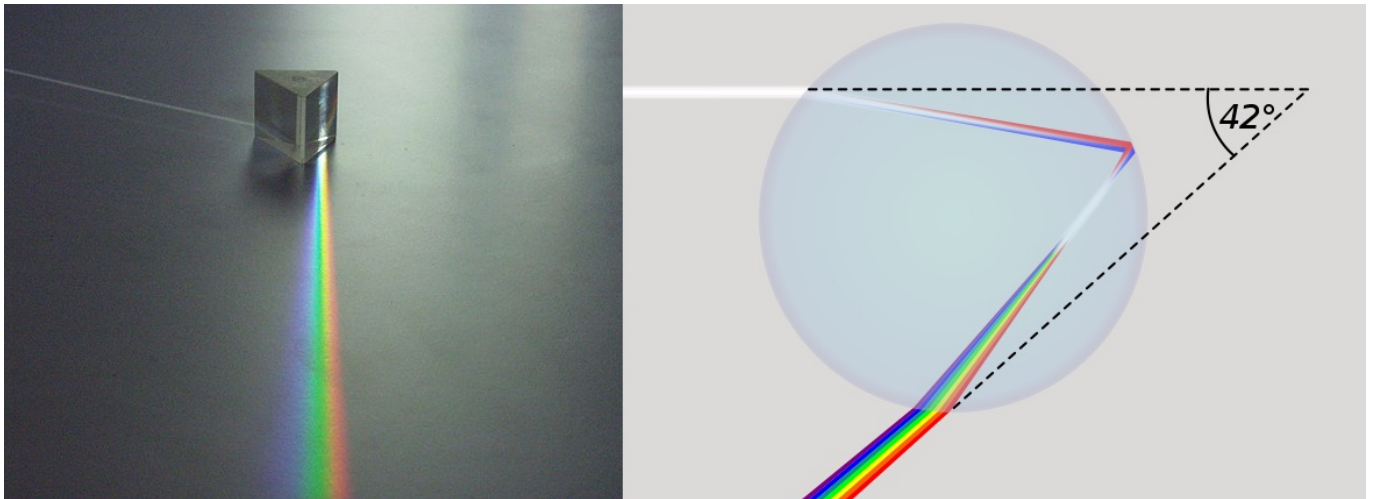
Lichtbreking leidt tot tal van optische effecten, waarmee we – bewust of onbewust – dagelijks

te maken hebben. Een voorbeeld is de werking van onze ogen zelf: daar zorgt de breking van licht in de lens ervoor dat lichtstralen kunnen worden gefocust op het netvlies. Ook bij de overgang van lucht naar water verandert een lichtstraal van richting. Dit kun je zelf testen. Doe een potlood (of ander langwerpig voorwerp) in een glas water, en je ziet het volgende: het deel van het potlood dat onder water staat, lijkt iets verschoven te zijn ten opzichte van de daadwerkelijke locatie! Dit gezichtsbedrog is een direct gevolg van de breking van licht op het wateroppervlak, zoals duidelijk wordt uit afbeelding 3 (rechts).



Afbeelding 3. Optische effecten door lichtbreking in water. Links: het deel van een potlood in een glas water lijkt iets verschoven te zijn ten opzichte van het deel buiten het water. Rechts: dit effect is een gevolg van de breking van licht aan het wateroppervlak, waardoor de lichtstralen van dit deel van het potlood vanaf een andere plek lijken te komen. Afbeelding links: [Mohammad Tajer](#). Afbeelding rechts: [Theresa Knott](#).

De kleur van het licht heeft ook invloed op de sterkte van de breking: paars (violet) licht wordt sterker gebroken, dan bijvoorbeeld rood licht. In afbeelding 2 betekent dit het volgende: voor vaste invalshoek, is de brekingshoek kleiner bij paars licht, dan bij rood licht. Dit effect wordt goed zichtbaar met een *prisma*. Doordat de verschillende kleuren in verschillende richtingen worden gebroken, valt de witte lichtstraal op een prisma uiteen in een waaier van kleuren, zoals te zien is in afbeelding 4. De inwendige breking en weerkaatsing van zonlicht in regendruppels werkt op dezelfde manier: de opsplitsing in verschillende kleuren zien we als een prachtige regenboog. Omdat paars licht het sterkst wordt gebroken, zien we die kleur aan de bovenkant van de boog, terwijl rood licht – met de minst sterke breking – onderaan te zien is.



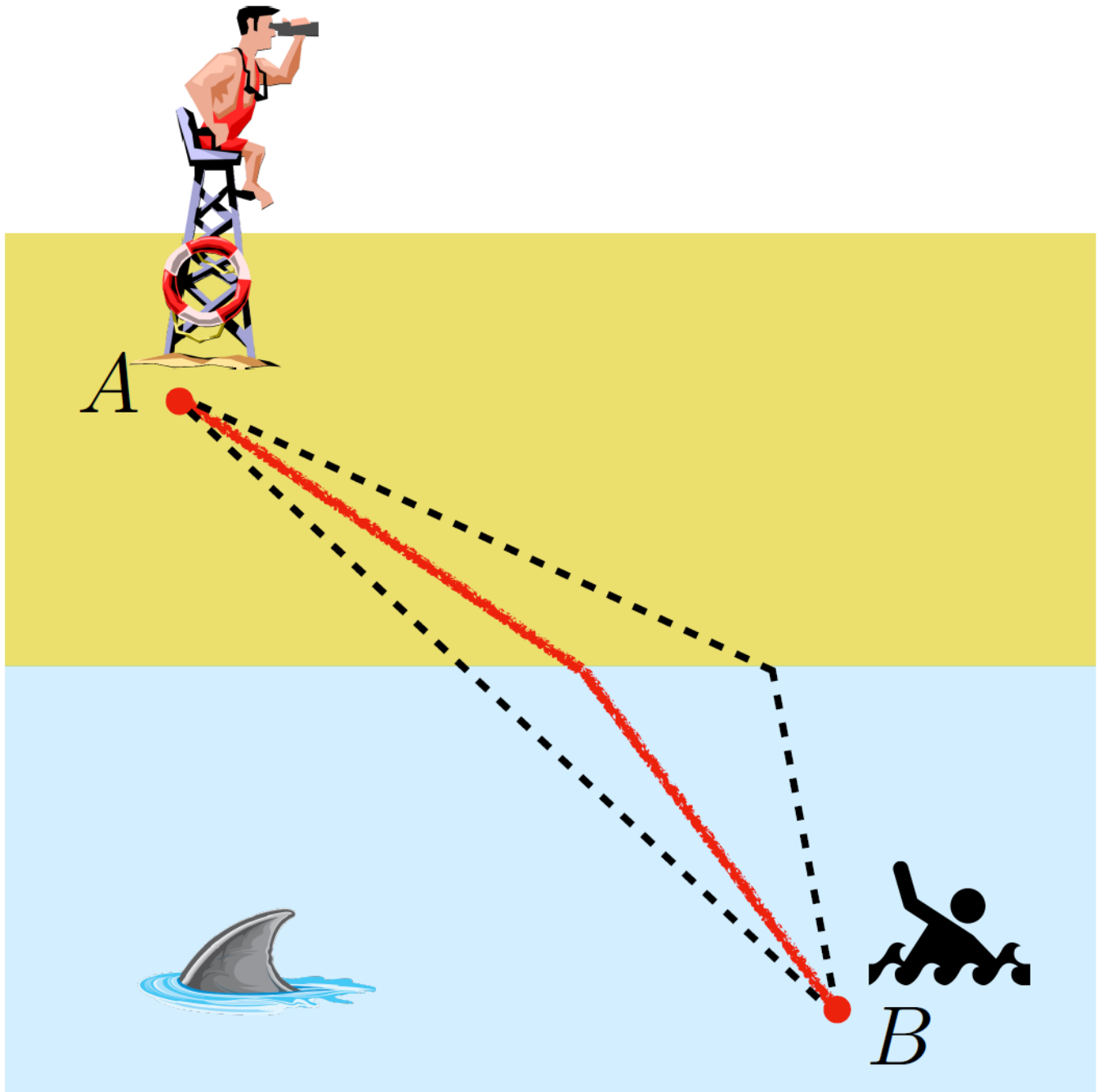
Afbeelding 4: De sterkte van de lichtbreking hangt af van de kleur. Links: een witte lichtstraal splitst in verschillende kleuren door breking in een prisma. Rechts: een regenboog ontstaat door de breking en weerkaatsing van licht in een regendruppel. Afbeelding links: [Zátonyi Sándor](#). Afbeelding rechts: [KES47](#).

Een strandwacht en het snelste pad

Al deze mooie natuurverschijnselen zijn het gevolg van hoe licht zich gedraagt bij een overgang van medium, maar wat is de verklaring voor de precieze manier waarop een lichtstraal breekt? Een interessant voorstel voor een antwoord op die vraag werd al in 1658 gedaan door de Franse wiskundige Pierre de Fermat. Fermat was – samen met René Descartes – een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit het eerste deel van de 17^e eeuw, en wordt tegenwoordig gezien als de grondlegger van de moderne [getaltheorie](#). Hij hield zich daarnaast ook bezig met meetkundige vraagstukken, en heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan het begrip van lichtbreking met zijn *`principe van minste tijd'*.

Fermats principe kan het best worden uitgelegd met behulp van een analogie. Stel je een strand voor met een strakke scheidslijn tussen zand en zee, zoals weergegeven in afbeelding 5. Er is een strandwacht aanwezig op het strand, aangegeven met A. De strandwacht merkt een om-hulp-roepende zwemmer op, aangegeven met B. Het doel van de strandwacht is om zo snel mogelijk de zwemmer in nood te bereiken. De vraag is nu: wat is het snelste pad? De *kortste* afstand van A naar B is natuurlijk een rechte lijn tussen beide punten, maar dit blijkt niet de *snelste* route te zijn! De reden hiervoor is dat de snelheid niet overal gelijk is: de strandwacht zal in het water langzamer vooruitkomen dan op het strand. Daarom is het – om het snelste pad te vinden – voordeliger om een korter stuk van de route in het water af te

leggen, en een langer stuk op het zand. De optimale route is met een rode kleur aangegeven in afbeelding 5. Hoewel de totale afstand van deze route iets langer is dan de (gestreepte) rechte lijn, is de strandwacht op deze manier wel het snelst.



Afbeelding 5: Een strandwacht en zwemmer in nood. Hoe komt de strandwacht (A) het snelst bij de zwemmer (B)? Als we aannemen dat de strandwacht langzamer is in de zee dan op het zand, is de rechte lijn (gestreept links) tussen A en B niet de snelste route. Het is voordeliger om een groter stuk op het zand af te leggen: één zo'n route is weergegeven als een gestreepte lijn (rechts). De snelste route heeft precies de juiste balans tussen zand en zee en

is aangegeven met rood.

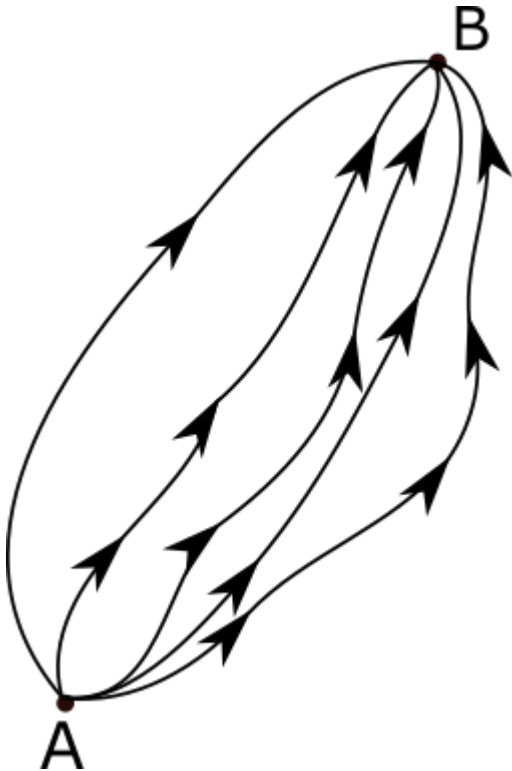
Het centrale idee achter Fermats principe is dat een lichtstraal zich precies op dezelfde manier als de strandwacht gedraagt: vergelijk afbeelding 5 met afbeelding 2! Door aan te nemen dat de snelheid van licht lager is in een medium met een hogere dichtheid – bijvoorbeeld water – en door gebruik te maken van zijn meetkundige formules, liet Fermat zien dat de breking van licht kan worden afgeleid uit het volgende principe: dat een lichtstraal tussen twee punten altijd het pad volgt dat de minste tijd kost. Dit is Fermats *principe van minste tijd*. De aanname die Fermat deed over de lichtsnelheid in verschillende media werd later bevestigd door de golftheorie voor licht van de Nederlands wetenschapper Christiaan Huygens.

Newton versus Lagrange

Als je langer nadenkt over de bovenstaande interpretatie van lichtbreking uit Fermats principe valt je wellicht iets bijzonders op. De klassieke mechanica – grof gezegd: de natuurkunde van objecten die we met het blote oog kunnen zien – is meestal geformuleerd via een oorzaak-gevolgprincipe: een object begint vanuit een gekozen startpositie en gaat bewegen onder de invloed van bepaalde krachten. De precieze baan van het object als een functie van de tijd kun je vervolgens berekenen door de [wetten van Newton](#) te gebruiken, en daaruit kan uiteindelijk de eindpositie van het object worden afgeleid. Het principe van Fermat lijkt een heel andere aanpak te gebruiken: hier wordt het pad van het lichtdeeltje gevonden door zowel de *beginpositie* als *eindpositie* van het pad vast te leggen, en vervolgens over alle paden ertussen te minimaliseren. Misschien dat dit je een iets ongemakkelijk gevoel geeft: weet het lichtdeeltje dan al waar het uiteindelijk terecht gaat komen?

Het antwoord is natuurlijk ‘nee’: lichtdeeltjes kunnen niet in de toekomst kijken! Toch blijkt dat ook de klassieke mechanica volledig kan worden geformuleerd in termen van een principe dat eenzelfde smaak heeft als dat van Fermat. Namelijk: dat alle objecten bij hun beweging ‘iets’ minimaliseren. In het algemeen is dat ‘iets’ niet de tijd van de afgelegde weg – zoals bij de lichtstraal – maar een meer abstract concept dat de *actie*¹ wordt genoemd. Daarom wordt dit ook wel het ‘*principe van kleinste actie*’ genoemd. De paden waarover wordt geminimaliseerd zijn ook niet per se fysieke paden van het object in de ruimte, maar

kunnen meer abstracte paden zijn in de ruimte van mogelijke toestanden van het systeem, ook wel configuratieluimte genoemd.



Afbeelding 6: Een voorbeeld van verschillende paden in een abstracte

configuratieluimte. Aan ieder pad - dat de mogelijke beweging van een object in de fysieke ruimte voorstelt - kan een getal worden toegekend dat we de 'actie' noemen. Het formalisme van Lagrange geeft nu een manier om het pad te berekenen dat de kleinste waarde voor de actie heeft: dit pad stelt de daadwerkelijke beweging van het object voor. Het principe achter deze berekening is hetzelfde als bij het probleem van de

strandwacht/zwemmer in nood en de breking van licht. Afbeelding: [Sachin48](#).

Deze kijk op de klassieke mechanica als een soort optimalisatieprobleem werd aan het einde van de 18^e eeuw door een andere bekende wiskundige, de Frans-Italiaanse Joseph-Louis Lagrange, geïntroduceerd. Het staat om die reden bekend als *Lagrangiaanse mechanica*. Beide manieren om tegen het de natuur aan te kijken, in termen van de Newtoniaanse wetten of als een Lagrangiaans optimalisatieprobleem, zijn in principe even 'goed' in het verklaren van wat we zien, maar het kan best zijn dat het ene model soms handiger in gebruik is dan het andere. Het vastleggen van zowel de begin- als eindtoestand van het systeem voelt misschien wat gek aan, maar is vanuit het perspectief van de natuurkunde als verklarend model niet beter of slechter dan de Newtoniaanse aanpak waar je alleen de begintoestand en -snelheid specificeert.



Afbeelding 6: Newton versus Lagrange. Een portret van Isaac Newton (links) door

[Godfrey Kneller](#), en een portret van Joseph-Louis Lagrange (rechts, [auteur onbekend](#)).

Daarnaast blijkt de Lagrangiaanse kijk op *klassieke* mechanica conceptueel heel nuttig, omdat deze formulering een natuurlijke transitie toestaat naar de *quantummechanica*: in 1948 ontdekte de natuurkundige Richard Feynman de [padintegraal](#) beschrijving van de quantumwereld, als een veralgemenisering van het principe van kleinste actie naar het geval van elementaire deeltjes zoals elektronen en fotonen. In deze beschrijving wordt de kans op een bepaalde eindtoestand van een deeltje berekend door alle mogelijke paden die naar deze eindtoestand leiden mee te rekenen. In de klassieke limiet, waar quantumeffecten geen rol spelen, reproduceert de padintegraal precies de Lagrangiaanse mechanica, en daarmee het idee van Fermat over de breking van licht.

Samenvattend: we hebben gezien dat de breking van licht bij de overgang tussen twee stoffen aanleiding geeft tot tal van mooie effecten, van regenbogen tot optische lenzen. Een interessante verklaring voor de precieze manier waarop een lichtstraal van richting verandert, werd door de wiskundige Fermat gegeven: volgens hem neemt een lichtstraal altijd de snelste route. Dit principe kan worden veralgemeniseerd naar de hele klassieke mechanica, waarin de beweging van objecten een bepaald optimalisatieprobleem oplossen. Deze kijk op de natuur blijkt ook van fundamenteel belang voor het begrip van de mysterieuze quantumwereld, waarin elementaire deeltjes alle mogelijke paden lijken te bewandelen. In zekere zin was Pierre de Fermat zijn tijd dus ver vooruit!

[\[1\]](#) *Voor de liefhebbers: de actie is gelijk aan de kinetische energie minus de potentiële energie van het object.*