Symmetrieën II: De stelling van Noether

In het eerste deel van dit tweedelige artikel heb je gelezen wat symmetrieën precies zijn en wat de wiskunde erachter is. In dit artikel zullen we een belangrijke stelling in de natuurkunde bespreken: de stelling van Noether. Met behulp van deze stelling kunnen we begrijpen waarom de planeten in stabiele banen rond de zon draaien!

Inleiding

In het eerste artikel van de serie *symmetrieën* heb ik verteld wat een symmetrie is en dat de achterliggende structuur in de wiskunde een *groep* wordt genoemd. We hebben toen niet veel natuurkunde gedaan, maar vooral naar de wiskunde gekeken. In dit artikel zullen we meer naar de natuurkundige aspecten van symmetrieën kijken aan de hand van een prachtig voorbeeld. We zullen namelijk de volgende vraag beantwoorden: waarom beweegt de aarde in een ellips rond de zon, zonder naar de zon toe te bewegen? Zwaartekracht is immers een aantrekkende kracht!

Stelling van Noether

Om deze vraag te beantwoorden, zullen we allereerst weer wat meer naar de wiskunde moeten kijken. Laten we beginnen met een heel eenvoudige vraag. Stel dat ik een experiment doe, bijvoorbeeld een meting van de trillingstijd van een wrijvingsloos massa-veer systeem. Zou het dan uitmaken of ik de meting van de trillingstijd vandaag, morgen of over een week doe? Intuitief zou je direct zeggen: “nee, want er is geen wrijving!” Natuurlijk klopt dit, maar wat betekent dat voor de natuurkunde? Welke gevolgen heeft dat? Verassend genoeg betekent het feit dat een translatie in de tijd, dus naar vandaag, morgen of over een week, geen invloed heeft op het experiment, dus ook niet op de natuurwetten, dat de energie van het systeem behouden is. In dit geval zijn de symmetrietransformaties tijdstranslaties, zoals we gezien hebben in het vorige artikel. Met ‘behouden’ bedoelen we dan ook ‘onveranderd in de tijd’. Je weet waarschijnlijk dat de trillingstijd en energie aan elkaar gerelateerd zijn. Als de meting van de trillingstijd vandaag, morgen of over een week hetzelfde is, is de energie dus ook hetzelfde gebleven.

De wiskundige *Emmy Noether* heeft deze vraag in zeer groot detail bestudeerd en een wonderlijke relatie gevonden tussen symmetrieën enerzijds en behouden grootheden, zoals energie, anderzijds. Haar stelling luidt

> *Als een systeem een symmetrie heeft, dan bestaat er ook een behouden grootheid.*

In het voorbeeld hierboven is de symmetrie *tijdstranslaties* en de behouden grootheid *energie.* Met het ‘systeem‘ bedoel ik het massa-veersysteem plus de natuurkundige wetten, dus in dit geval de zwaartekracht.

Afbeelding 1. Emmy Noether. Emmy Noether was één van de invloedrijkste wiskundigen en is bij natuurkundigen vooral bekend om haar stelling die symmetrieën en behouden grootheden aan elkaar verbindt. Afbeelding: wikipedia-gebruiker Triggerhippie4

Nu we weten dat tijdstranslaties en energie aan elkaar gerelateerd zijn, willen we weten wat er gebeurt als een systeem onveranderd blijft als je het draait. Denk bijvoorbeeld aan de lolly uit het eerste artikel. Een lolly heeft rotatie-symmetrie en voor ons is dit ook erg belangrijk, want de zon lijkt erg veel op een lolly! Het zijn allebei bolvormige objecten en ze blijven allebei onveranderd onder een willekeurige rotatie. Uit de stelling van Emmy Noether volgt dat als een systeem rotatie-symmetrie heeft, het impulsmoment behouden is. Om deze zin goed te kunnen begrijpen moet ik eerst beter toelichten wat impulsmoment is.

Impulsmoment

Impulsmoment geeft de hoeveelheid draaibeweging van een object weer. Een object met een grote rotatiesnelheid heeft een groter impulsmoment dan hetzelfde object met een kleine rotatiesnelheid. Evenzo heeft een ring een groter impulsmoment dan een schijfje met dezelfde diameter, massa en hoeksnelheid. Wil je impulsmoment veranderden? Dat kan: daarvoor moet je een *moment* (grofweg: een kracht in de draairichting) op de draaibeweging uitoefenen, net zoals je een gewone kracht moet uitoefenen om een bewegende massa van snelheid te veranderen.

Voor planeten die rond de zon draaien kun je ook het impulsmoment uitrekenen. Als we het onszelf even eenvoudig maken en aannemen dat de planeetbanen cirkelvormig zijn, dan wordt het impulsmoment, dat we aangeven met L, gegeven door

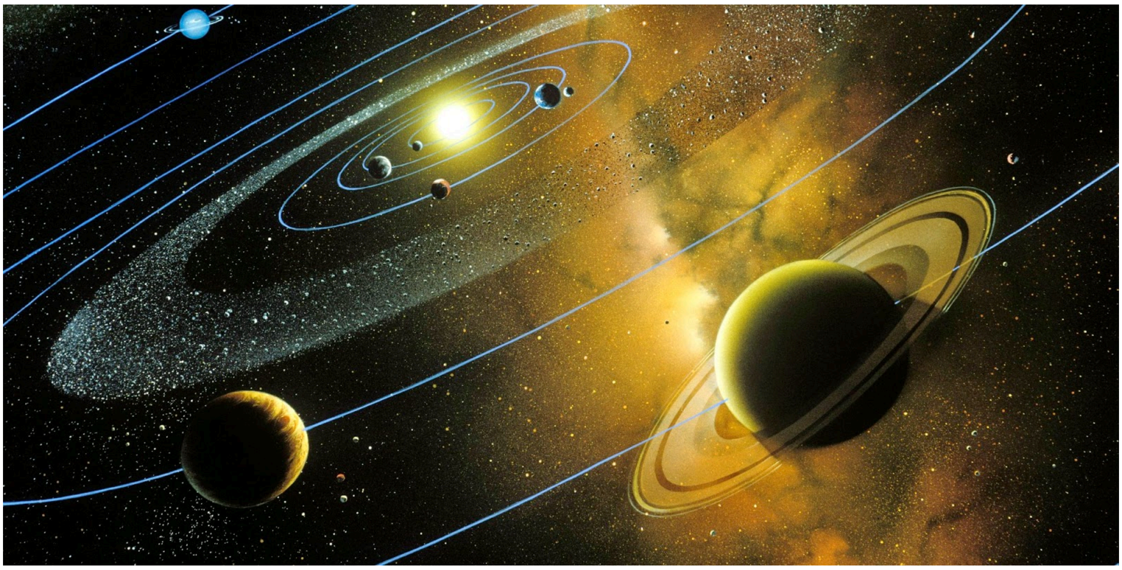
$$\mathbf{L = \omega M R^2.}$$

In deze formule is M de massa van de planeet, R zijn afstand tot de zon en ω de hoeksnelheid waarmee de planeet om de zon draait. Als L een behouden grootheid is, betekent dat dus dat L niet verandert in de tijd. Om erachter te komen wat dit met rotatie-symmetrie te maken heeft, doen we het bovenstaande experiment, maar dan nu met een platte schijf die rond zijn as draait. Rond deze as is de schijf rotatie-symmetrisch. In dit experiment verandert de as van de schijf niet en kan de schijf wrijvingsloos draaien. Als de schijf eenmaal in beweging is gebracht, willen we de rotatiesnelheid ω bepalen. Aangezien de rotatie van de schijf wrijvingsloos en de schijf rotatie-symmetrisch, zal de rotatiesnelheid hetzelfde blijven, ongeacht of je die nu vandaag, morgen of over een week meet. Bovendien weten we dat het impulsmoment gerelateerd is aan rotatiesnelheid en dus blijft ook het impulsmoment onveranderd. Net zoals tijd en energie aan elkaar gerelateerd zijn via de stelling van Noether, zijn ook rotatie symmetrie en impulsmoment aan elkaar gerelateerd.

Als je daarentegen een serie remblokjes op de rand van de schijf opstelt, dan oefenen die remblokjes een wrijvingskracht uit op de schijf die niet naar het midden van de schijf is gericht, maar tegen de bewegingsrichting van de schijf in. Deze wrijvingskracht hoort nu ook bij het systeem en aangezien deze niet in de radiële richting staat, is er ook geen sprake meer van rotatiesymmetrie in het systeem. De zwaartekracht is echter wel radieel gericht en dus blijft een systeem van de zon, een planeet en de zwaartekracht rotatie-symmetrisch.

Stabiele planeetbanen

We hebben nu genoeg theorie besproken om te begrijpen waarom planeten in een baan rond de zon blijven draaien, zonder naar de zon te vallen!



Afbeelding 2. Ons zonnestelsel.Dankzij behoud van impulsmoment en energie blijven planeten in stabiele banen rond de zon draaien.

We kunnen de zon voorstellen als een bol en dus is er sprake van rotatie-symmetrie. Uit de vergelijkingen van Newton volgt dan dat de zwaartekracht van de zon alleen afhangt van de afstand tot de zon en niet van de hoek ten opzichte van de noordpool. Dit kun je heel gemakkelijk zien door de vergelijking van het zwaartekracht van de zon te bekijken,

$\mathbf{F = G\, M_{zon}\, m_{planeet} / r^2.}$

Hierin staat alleen de afstand tot de zon, *r*, en geen hoeken. Door gebruik te maken van de stelling van Emmy Noether weten we nu ook dat impulsmoment behouden moet blijven. Impulsmoment is dus een constante. Die constante is voor elke planeet in ons zonnestelsel anders, maar met het voorbijgaan van de tijd verandert deze constante niet. Naast impulsmoment als behouden grootheid, hebben we natuurlijk ook behoud van energie. Stel dat je nu het volgende gedachte-experiment doet. Je plaatst de aarde een miljoen kilometer dichter bij de zon, zodanig dat impulsmoment behouden blijft. Dit betekent dat de aarde veel sneller rond de zon moet gaan draaien. Kijk maar naar de formule voor het impulsmoment hieboven. Hiervoor heb je echter energie nodig – die je nergens vandaan kunt halen, want energie is behouden – en dus is die baan niet stabiel. De aarde zal vervolgens naar de energetisch meest voordelige baan zoeken en dat is natuurlijk de originele baan. De baan van de planeten kun je dus niet veranderen zonder behoud van impulsmoment of energie te schenden. Dankzij rotatie- en tijdstranslatiesymmetrie zal dit nooit gebeuren en blijven de planeten keurig rond de zon draaien.

Concluderend kunnen we stellen dat planeten in hun baan rond de zon blijven draaien omdat er behoud van zowel impulsmoment als energie is. In termen van symmetrieën betekent dit dat er sprake is van een rotatie- en tijdstranslatiesymmetrie. Zonder deze symmetrieën zou ons zonnestelsel binnen de kortste keren in elkaar storten en zouden er geen stabiele banen rond de zon mogelijk zijn. Natuurlijk zijn de waarden van het impulsmoment en de energie van de planeten bepaald toen ons zonnestelsel gevormd werd. Toen er eenmaal een evenwichtig zonnestelsel aanwezig was, was de symmetrie van het zwaartekrachtsveld bijna perfect en bleven de planeten in hun stabiele banen rond de zon bewegen.