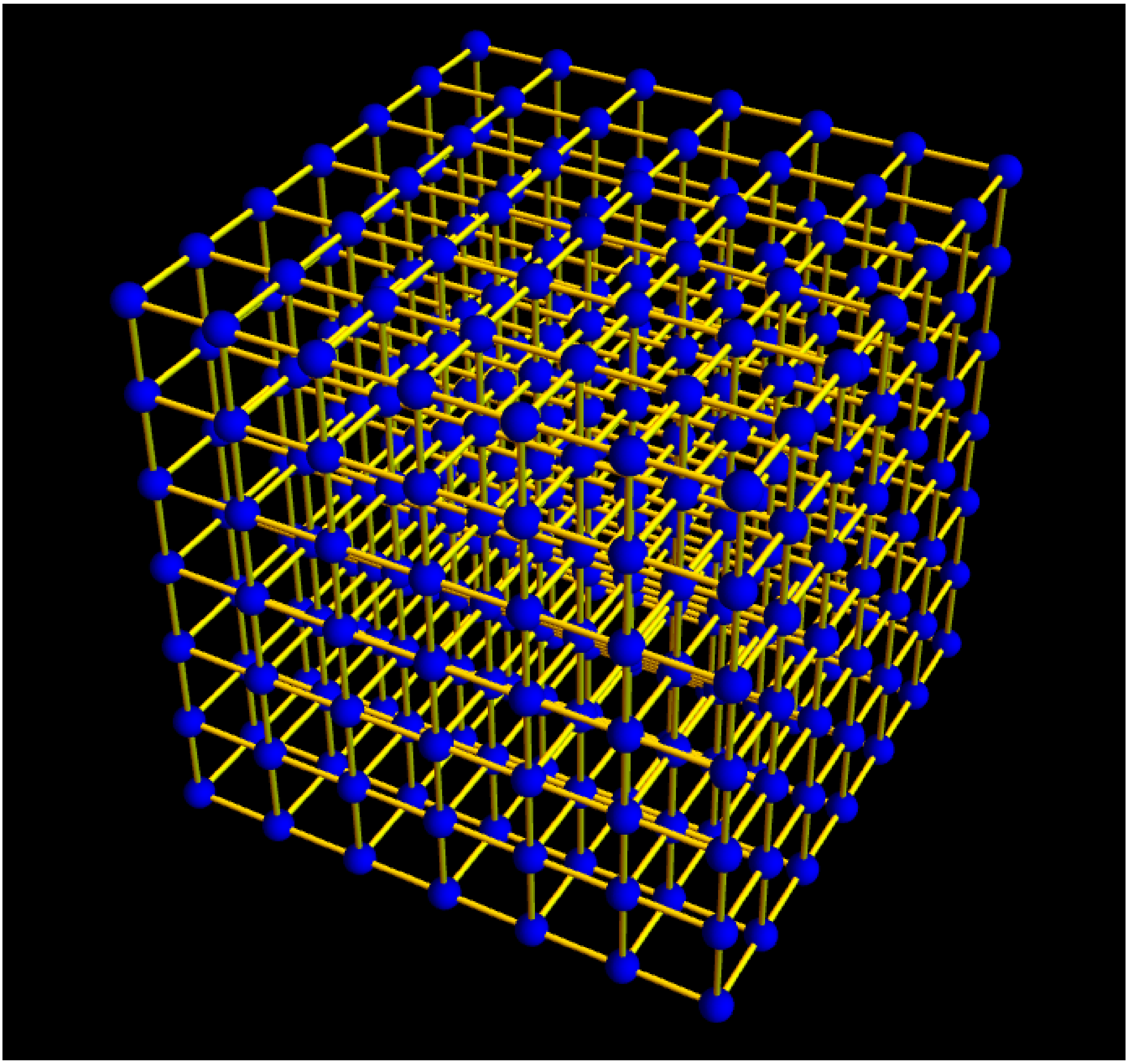
Storingsrekening (5): De storingsreeks herrezen

Het idee van 'storingsrekening' is om een bepaalde natuurkundige grootheid – bijvoorbeeld de uitkomst van een experiment – in stapjes te berekenen. Eerst wordt er een grove benadering gemaakt; vervolgens wordt een correctie op die benadering berekend; daarna een correctie op de correctie, enzovoort. Soms leidt deze wiskundige procedure tot een willekeurig goede benadering van het eindantwoord. In het vorige artikel in dit dossier zagen we dat het soms echter ook mis gaat. Bij zogeheten 'asymptotische reeksen' wordt de benadering eerst steeds beter, maar op een gegeven moment worden de achtereenvolgende correctietermen juist weer gróter, en de optelsom daarmee slechter.



Afbeelding 1. Een rooster.Om de problemen met storingsreeksen op te lossen wordt een natuurkundigmodel soms beperkt tot een rooster. Deze oplossing werkt vaak goed, maar in dit artikel zullen we zien dat ook de storingsreeks *zelf* een verrassende oplossing biedt.

In dit artikel:

Weg met de storingsrekening!

Hoe kunnen we dit probleem van divergerende storingsreeksen oplossen? Allereerst natuurlijk door een heel andere benadering van het probleem te zoeken. Eén manier daarvoor is bijvoorbeeld om onze ruimte in de berekening vervangen door een *rooster*. Een rooster is een regelmatige verzameling van punten in de ruimte – zoiets als in afbeelding 1. We maken vervolgens een natuurkundig model waarin alles zich op deze roosterpunten afspeelt. Deeltjes kunnen zich, in plaats van overal in de ruimte, alleen op deze roosterpunten bevinden; velden zoals het elektromagnetische veld hebben alleen op de roosterpunten een waarde, enzovoort. Het moge duidelijk zijn dat dit een heel grove benadering van de werkelijkheid is, maar wanneer we vervolgens de afstand tussen de roosterpunten steeds kleiner maken, wordt de benadering wel steeds beter.

In veel gevallen blijkt het mogelijk om op deze manier goede voorspellingen voor uitkomsten van natuurkundige experimenten te vinden. Het beroemdste voorbeeld is misschien wel de sterke kernkracht – de kracht waarmee de quarks in de kernen van atomen elkaar aantrekken en afstoten. In het vorige artikel zagen we dat juist voor processen waarin die kracht een rol speelt, de storingsrekening lijkt te falen. Met behulp van roostertechnieken kunnen we echter voor kernprocessen heel goede voorspellingen doen.

Natuurkundigen hebben nog allerlei andere technieken bedacht om berekeningen te kunnen doen zonder dat daarbij storingsrekening nodig is. Ook de AdS/CFT-dualiteit die we elders op deze site bespraken is daar een voorbeeld van. In deze serie willen we echter niet op al die technieken ingaan, maar ons afvragen of de storingsrekening *zelf* nog te redden valt.

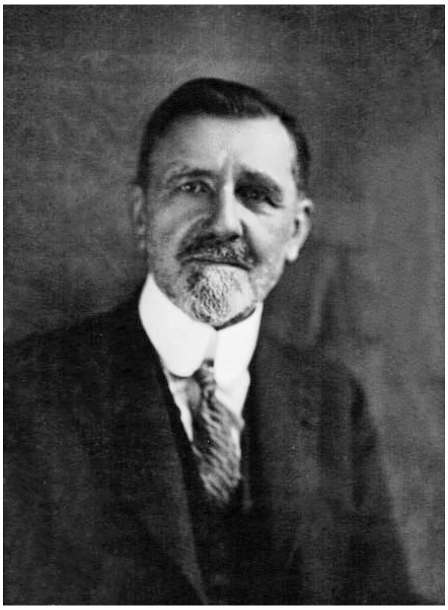
Naar boven

De truc van Émile Borel

Dat storingsrekening ook in het geval van asymptotische reeksen zo gek nog niet is, werd in 1899 ontdekt door de Franse wiskundige Émile Borel. Hij bedacht een truc die op het eerste gezicht nogal naïef lijkt, maar die verrassend effectief blijkt te zijn. Stel dat we een storingsreeks hebben die asymptotisch gedrag vertoont: eerst benaderen de optelsommen een bepaalde uitkomst steeds beter, maar daarna worden de benaderingen weer steeds slechter. In het vorige artikel kwamen we al een voorbeeld van zo’n reeks tegen:

1 + 2/10 + 6/100 + 24/1000 + 120/10.000 + 720/100.000 + …

De noemers van de breuken zijn opeenvolgende machten van 10; de tellers zijn 1, 2 × 1, 3 × 2 × 1, 4 × 3 × 2 × 1, enzovoort. Deze getallen worden ‘faculteiten’ genoemd, en met behulp van een uitroepteken geschreven als 1!, 2!, 3!, 4!, enzovoort.



Afbeelding 2. Émile Borel (1871-1956).Foto: Bibliothèque Nationale de France.

In eerste instantie zijn het in de uitrukking hierboven vooral de noemers die snel toenemen, waardoor de correctietermen steeds kleiner worden. Uiteindelijk gaan echter de tellers hard groeien, en worden de correctietermen (vanaf de elfde term) weer groter.

De truc die Borel bedacht was de volgende: wat als we de opeenvolgende termen van een asymptotische reeks nu eens delen door 1!, 2!, 3!, enzovoort? In het geval hierboven blijft er dan een heel eenvoudige reeks over:

1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10.000 + 1/100.000 + …

Wie zich de rekentrucs uit het artikel over [Achilles en de schildpad] nog kan herinneren, kan proberen deze – nu [convergente] – reeks zelf op te tellen. De uitkomst blijkt 10/9 te zijn.

Daarmee is het oorspronkelijke probleem natuurlijk niet opgelost. We hebben alleen de asymptotische storingsreeks vertaald in een *andere* storingsreeks die wel opgeteld kan worden. De slimme vervolgstap van Borel is dat hij besefte dat we deze truc ook voor gerelateerde storingsreeksen kunnen toepassen (in dit geval bijvoorbeeld door de noemers te veranderen van machten van 10 in machten van een willekeurig getal *x*), en dat het resulterende antwoord daarmee gezien kan worden als een *functie* van een variabele *x*. Vervolgens bewees hij dat uit deze functie, met behulp van een bepaalde integraal (ook al vernoemd naar een Fransman: de *Laplace-transformatie*) het antwoord van de *oorspronkelijke* storingsreeks berekend kan worden! Deze truc, die tegenwoordig bekend staat als *Borel-sommatie*, kan dus gebruikt worden om het *exacte* antwoord te berekenen van problemen waarin we een op het oog niet goed gedefinieerde, asymptotische storingsreeks vinden.

Borel-sommatie blijkt allerlei bonussen met zich mee te brengen. Zo kunnen we, wanneer we eenmaal het exacte antwoord hebben uitgerekend (of numeriek hebben benaderd – iets wat vaak veel eenvoudiger is) ook schatten hoe groot de foutmarges zijn als we in de oorspronkelijke reeks maar een beperkt aantal termen optellen. Er kan vervolgens bewezen worden dat de optelling waarbij de kleinst mogelijke fout wordt gevonden, precies die is waarin de laatst meegenomen term de kleinst mogelijke is – precies op het punt waar de benaderingen weer slechter worden, dus. Dit is exact wat we in het vorige artikel beschreven als optimale truncatie. In dat artikel kwam die methode enigszins uit de lucht vallen, en was het allesbehalve duidelijk waarom die werkte. Met de technieken van Borel kan echter precies wiskundig bewezen worden dat dit ‘afkapvoorschrift’ werkt!

Naar boven

Herrijzenis van de storingsreeks

Daarmee is de storingsreeks in ere hersteld. De titel van dit artikel, ‘de storingsreeks herrezen’, heeft echter meer dan alleen die betekenis. De truc van Borel blijkt namelijk nog maar het topje van een enorme ijsberg. Dat er nog veel meer uit sommatiemethodes gehaald kan worden, werd in de jaren ’80 ontdekt door de Fransman (alweer een Fransman!) Jean Écalle. De door Écalle bedachte technieken sloegen in eerste instantie in de natuurkunde niet erg aan – niet omdat ze niet bruikbaar zouden zijn, maar omdat Écalle zijn ideeën opschreef in een honderden pagina’s tellend Franstalig document. Geen geweldige PR-move, natuurlijk, maar uiteindelijk werd het werk vertaald en samengevat, en sinds het begin van de 21e eeuw, en met name in de afgelopen vijf jaar, is de belangstelling voor Écalles ideeën ook binnen de natuurkunde sterk toegenomen.

Afbeelding 3. Jean Écalle.Foto: Université Paris-Sud.

Écalle gaf zijn technieken de naam *resurgence* mee – een Engels woord dat zoiets betekent als ‘hergeboorte’ of ‘herrijzenis’. De asymptotische storingsreeksen bleken namelijk een ‘blessing in disguise’ te zijn: niet alleen konden ze vaak dankzij Borel-sommatie bruikbaar gemaakt worden; ze doken bovendien in vermomming op in de beschrijving van solitonen en instantonen in de oorspronkelijke vraagstukken. Soli…wat? Dat beschrijven we in het volgende artikel!

[Naar boven]

In het [volgende artikel in deze reeks] bespreken we een tweede probleem met storingsreeksen – een probleem dat verrassenderwijs exact dezelfde oplossing heeft als dat van de asymptotische reeksen!.