Storingsrekening (4): Genoeg is genoeg!

In het voorgaande artikel in dit dossier kwamen we een nogal bevreemdend fenomeen tegen. We hadden het daar over het uitrekenen van een bepaalde natuurkundige grootheid: de gyromagnetische verhouding van het elektron. Met behulp van de quantummechanica kan een 'machtreeks' gevonden worden – een oneindige reeks van getallen die, wanneer we de getallen optellen, de gemeten waarde steeds beter lijkt te benaderen. Tellen we enkele tientallen van deze getallen op, dan vinden we een uitkomst die alle 13 gemeten decimalen van de gyromagnetische verhouding juist voorspelt. Tellen we echter nog veel meer termen op, dan wordt het antwoord weer slechter en slechter, en uiteindelijk zelfs oneindig groot! Hoe is dit te verklaren?

Afbeelding 1. Genoeg is genoeg!In dit artikel zullen we zien hoe we door een mysterieuze truc met bepaalde divergente optelsommen kunnen omgaan. Met behulp van 'optimale truncatie' kunnen we deze sommen op precies de juiste plek afkappen, en zo fysisch relevante antwoorden vinden. Foto: Dan Edwards.

In dit artikel:

Asymptotische reeksen

In een eerder artikel in deze serie hebben we machtreeksen opgedeeld in twee types: convergente reeksen en divergente reeksen. Beide types reeksen zijn (meestal oneindig lange) uitdrukkingen van de vorm

$\mathbf{c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 + \ldots}$

Hierin staat *x* voor een bepaalde parameter die ons antwoord bepaalt – in het geval van de gyromagnetische verhouding van het elektron bijvoorbeeld de fijnstructuurconstante – en zijn c_0, c_1, enzovoort, getallen. Machtreeksen geven ons dus niet één antwoord voor één probleem; ze geven ons een hele serie van antwoorden – een antwoord voor elke mogelijke waarde van de parameter *x*.

Ter herinnering: een machtreeks is *convergent* wanneer de opeenvolgende termen in de bovenstaande optelsom snel kleiner worden – zo snel, dat het eindantwoord een bepaalde 'grenswaarde' beter en beter benadert. Die grenswaarde is dan de uitkomst van de oneindige som – zie bijvoorbeeld het voorbeeld van Achilles en de schildpad.

Benadert de optelsom echter geen bepaalde grenswaarde (hetzij omdat *x* te groot is, hetzij omdat de getallen c_0, c_1, enzovoort zelf te snel toenemen), dan noemen we de reeks *divergent*. Merk op dat *dezelfde* machtreeks voor verschillende keuzes van *x* dus kan veranderen van een convergente in een divergente reeks!

Nu kan een reeks op enorm veel verschillende manieren divergent zijn. Soms groeien alle opeenvolgende termen in de reeks heel snel – neem bijvoorbeeld de reeks

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + …

Het moge duidelijk zijn dat deze reeks oneindig groot wordt, en geen enkele eindige 'grenswaarde' benadert. Er zijn echter ook gevallen waarin de reeks eerst een tijdje lijkt te convergeren, en daarna begint te divergeren. Neem bijvoorbeeld de reeks

$\mathbf{1 + 2\, x + 6\, x^2 + 24\, x^3 + 120\, x^4 + 720\, x^5 + \ldots}$

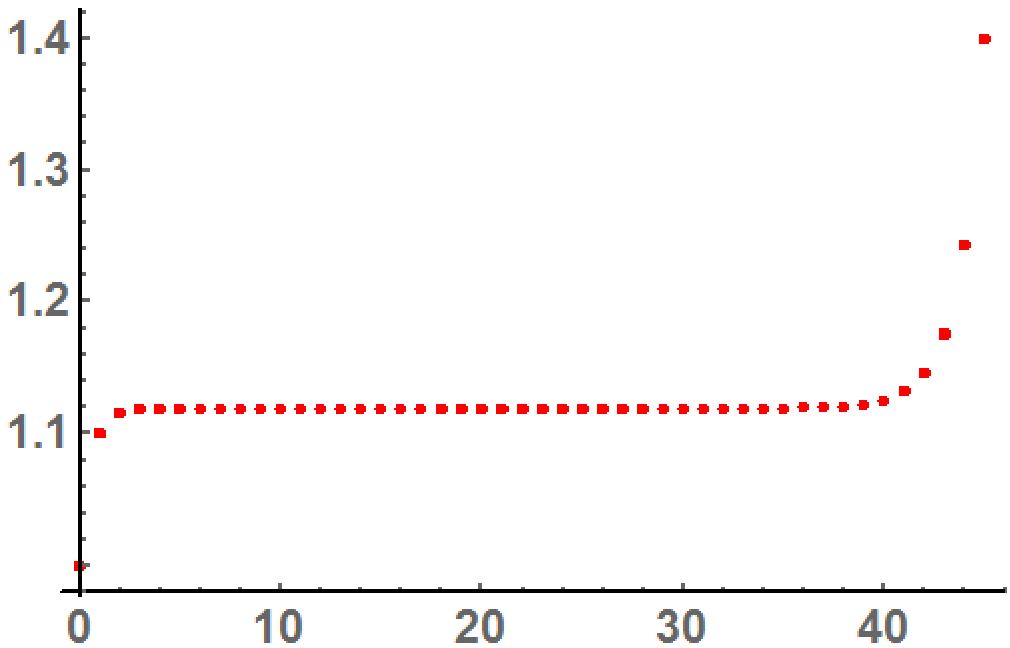
Ziet u het patroon in de termen? De tweede coëfficient is tweemaal de eerste, de derde is driemaal de tweede, de vierde is viermaal de derde, enzovoort. Vullen we een kleine waarde voor *x* in, bijvoorbeeld x = 0,2, dan vinden we

1 + 0,4 + 0,24 + 0,192 + 0,192 + 0,2304 + …

Eerst lijken de termen steeds kleiner en kleiner te worden, maar vanaf de zesde term worden de termen weer groter, en wie nog wat meer termen uitrekent zal ontdekken dat die groei zich blijft voortzetten. Vullen we een nog kleinere *x* in, bijvoorbeeld *x=0,1,* dan lijken de termen zich beter te gedragen: we vinden dan

1 + 0,2 + 0,06 + 0,024 + 0,012 + 0,0072 + …

Wie verder rekent vindt echter toch dat de termen op een gegeven moment weer gaan groeien – in dit geval vanaf de elfde term. De reden daarvoor is dat, het patroon volgend, de elfde coëfficient elfmaal de tiende is. De coëfficient wordt vanaf dat moment dus groter met een factor *groter* dan tien, terwijl de extra macht van *x* precies een factor 0,1 = 1/10 toevoegt.



Afbeelding 2. Een asymptotische reeks.In deze grafiek hebben we voor de bovenstaande asymptotische reeks de waarde *x = 0,05* ingevuld. Horizontaal staat het aantal termen in de optelsom uitgezet, verticaal het resultaat van de optelsom. We zien dat drie of vier termen al genoeg zijn om een waarde van iets meer dan 1,1 te vinden. Nemen we meer termen mee, dan wordt deze waarde steeds nauwkeuriger – tot grofweg de 20e term, waarna de uitkomsten eerst langzaam, en vanaf de 40e term heel snel, onnauwkeuriger worden.

Nemen we nu *x = 0,01*, dus 1/100, dan zullen we zien dat de eerste 100 termen van de reeks lijken te convergeren maar dat de reeks daarna divergeert, enzovoort. Hoe klein we *x* ook nemen, er komt altijd een moment waarop de reeks begint te divergeren. Een machtreeks die het bovenstaande gedrag vertoont, wordt een *asymptotische reeks* genoemd.

[Naar boven]

Optimale truncatie

In de natuurkunde komen veel asymptotische reeksen voor. De reeks die de gyromagnetische verhouding van het elektron bepaalt, is er een voorbeeld van. Asymptotische reeksen zijn divergent, maar ze lijken een stuk minder divergent dan bijvoorbeeld de reeks 1 + 2 + 4 + 8 + … De vraag is dus: kunnen we uit deze reeksen, ondanks dat ze divergeren, toch natuurkundig zinvolle antwoorden halen?

Een heel eenvoudige strategie zou de volgende kunnen zijn. We nemen een reeks zoals de reeksen hierboven, vullen de gewenste waarde van *x* in, en tellen de termen op *zolang ze kleiner blijven worden*. Zodra er echter een term groter wordt dan de voorgaande, kappen we de berekening af, en beschouwen we de optelsom die we dan gevonden hebben als het eindantwoord van de berekening. In de twee voorbeelden hierboven zouden we voor *x=0,2* dus alleen de eerste vijf termen optellen, en voor *x = 0,1* alleen de eerste tien. Deze ‘genoeg is genoeg’-procedure wordt *optimale truncatie* genoemd.

Afbeelding 3. Henri Poincaré (1854-1912).Poincaré was de eerste wiskundige die asymptotische reeksen in detail bestudeerde.

Verrassend genoeg blijkt deze procedure in de natuurkunde behoorlijk goed te werken. We zagen dit in het vorige artikel al voor de gyromagnetische verhouding van het elektron: zolang we daar maar een beperkt aantal termen optelden, vonden we de gemeten waarde tot op 13 decimalen nauwkeurig. Sterker nog: de beperking ligt daar in de meetprecisie – meten we nog enkele volgende decimalen, dan is er weinig twijfel aan dat die ook met de uitkomst van de reek zullen kloppen. Ergens, na vele tientallen decimalen, is het echter de optelsom *zelf* die zal beginnen te divergeren.

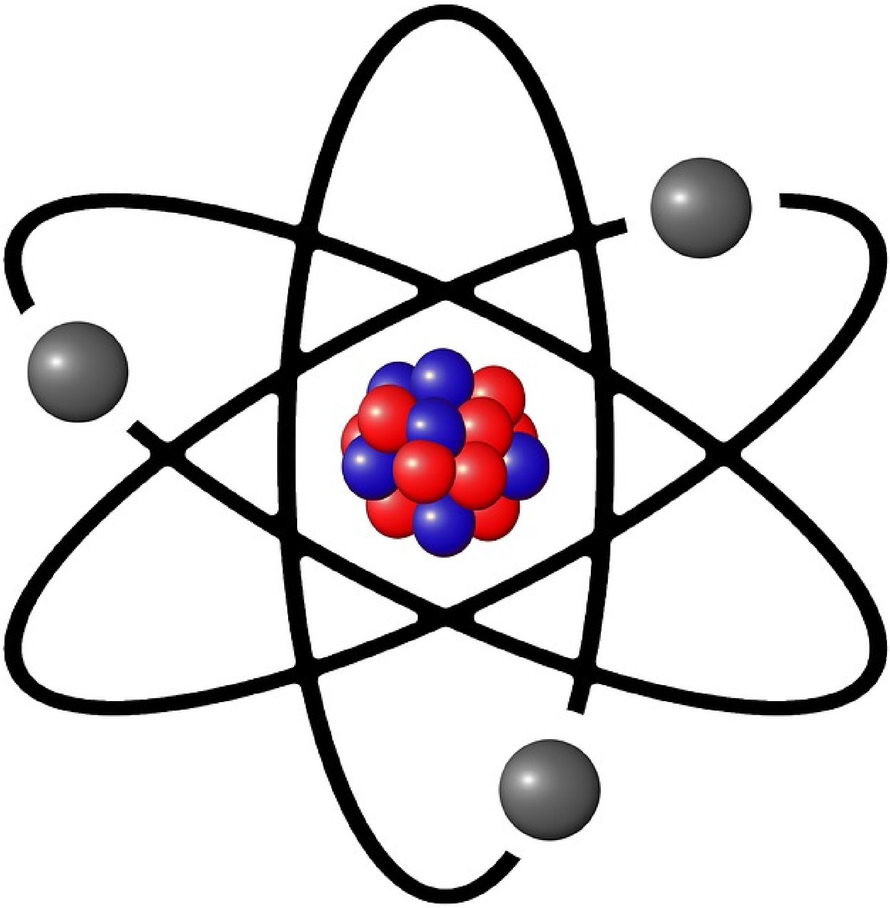
Op de vraag *waarom* deze procedure zo goed werkt, komen we in een volgend artikel terug. Heel erg voor de hand ligt dat immers niet: we nemen een uitdrukking die wiskundige onzin (oneindig) oplevert, gebruiken alleen dat deel van die uitdrukking die ons 'bevalt', en op bijna magische wijze vinden we antwoorden die prachtig overeenkomen met wat we in de natuur meten!

Naar boven

Hoe optimaal is optimaal?

Over het 'waarom' zoals gezegd later meer, maar laten we het nu nog even hebben over het nut van deze optimale truncatieprocedure. Wie het voorbeeld van de gyromagnetische verhouding van het elektron ziet, denkt wellicht dat we hiermee een Heilige Graal gevonden hebben, maar zo mooi als in dit voorbeeld is de situatie helaas niet altijd.

De reden dat de machtreeks voor de gyromagnetische verhouding zo goed haar werk doet, is dat de parameter x in die machtreeks de fijnstructuurconstante is – een parameter die een waarde van ongeveer $1/137 \approx 0{,}007$ heeft. Hierboven zagen we al dat asymptotische reeksen zich beter en beter gedragen naarmate x kleiner is, en het is precies deze kleine waarde voor x die ervoor zorgt dat de berekening van de gyromagnetische verhouding zo succesvol is.



Afbeelding 4. Een atoom.In de kern van een atoom zijn de krachten zó sterk, dat ook optimale truncatie van asymptotische reeksen al na een zeer klein aantal termen faalt.

De fijnstructuurconstante is de parameter die bepaalt hoe sterk de elektromagnetische kracht is. Wat gebeurt er echter als we processen bekijken waarin andere krachten een rol spelen? Het blijkt dat we dan soortgelijke reeksen vinden, maar met heel andere waarden voor x. Voor de zwakke kernkracht vinden we ook een heel kleine waarde voor de koppelingsconstante x (bij alledaagse energieën zelfs nog beduidend kleiner dan de fijnstructuurconstante), maar de *sterke* kernkracht heet niet voor niets zo: in de meeste berekeningen is de parameter x die de sterkte van die kracht bepaalt van de orde van grootte van 1. Dat houdt in dat de optimale truncatie een heel stuk minder 'optimaal' is: na één of enkele termen begint de machtreeks al te divergeren, en we kunnen nauwelijks relevante fysische informatie uit dit soort reeksen halen.

Kortom: soms, in processen met zwakke interacties, is optimale truncatie een wondermiddel, maar in andere gevallen hebben we weinig tot niets aan deze procedure. Zijn er nog andere trucs die we in dit soort gevallen kunnen gebruiken om tóch natuurkundige meetuitkomsten betrouwbaar te kunnen voorspellen? We zullen in het volgende artikel zien dat het antwoord ‘ja’ is!

Naar boven

In 2016 verschijnen de langere, wat dieper gaande dossier-artikelen op vrijdag. De overige QU-artikelen zullen met name op dinsdag verschijnen. Het vijfde artikel in dit dossier verschijnt op vrijdag 15 januari.