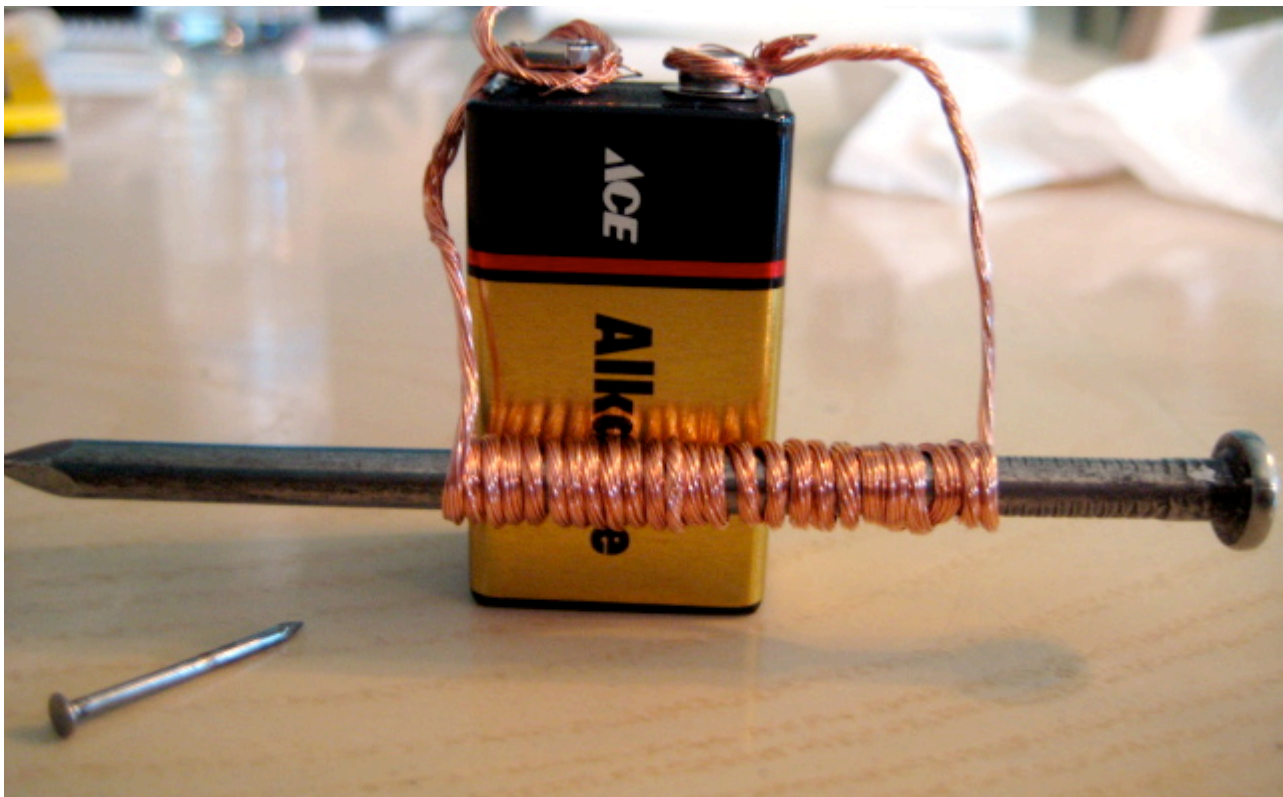


Storingsrekening (3): De fijnstructuurconstante

In de eerste twee artikelen in dit dossier hebben we voorbeelden gezien van situaties waarin wiskundige machtreeksen een rol spelen. Zulke machtreeksen zijn optelsommen waarin de opeenvolgende termen steeds hogere machten van een bepaalde parameter x bevatten. In het voorbeeld van [de koning en het schaakbord](#) kwamen we een lange maar eindige machtreeks tegen; in het voorbeeld van [Achilles en de schildpad](#) een oneindige machtreeks. In dit artikel zullen we een eerste voorbeeld zien van een natuurkundig systeem waarin machtreeksen een fundamentele rol spelen.



Afbeelding 1. Een elektromagneet. James Clerk Maxwell beschreef als eerste hoe elektriciteit en magnetisme één geheel vormen - iets dat eenvoudig aangetoond kan worden met een elektromagneet. Bovenstaande elektromagneet is eenvoudig zelf te maken. De sterkte van de magneet - en van alle andere elektromagnetische verschijnselen - hangt af van de grootte van de fijnstructuurconstante α . Foto: Gina Clifford.

In dit artikel:

- [Het elektromagnetische veld](#)
- [De fijnstructuurconstante](#)
- [De gyromagnetische verhouding](#)
- [Een machtreeks als eindantwoord - of niet?](#)

Het elektromagnetische veld

In de 19e eeuw ontdekten natuurkundigen dat elektriciteit en magnetisme veel met elkaar te maken hebben. Zo bleken bewegende magneten een elektrische stroom te kunnen genereren, en bleek omgekeerd dat een rondlopende stroom een magneetveld veroorzaakt. Dit laatste verschijnsel heeft allerlei nuttige toepassingen: het ligt aan de basis van de elektromagneet.

Het was uiteindelijk de Schotse natuurkundige James Clerk Maxwell die in 1873 elektriciteit en magnetisme in één wiskundig model beschreef. De formules die Maxwell als eerste opschreef (en die sindsdien dan ook de *Maxwellvergelijkingen* heten) beschrijven een veld dat overal in de ruimte aanwezig is: het “elektromagnetische veld”. De interactie van dit veld met elektrisch geladen deeltjes verklaart alle bekende elektrische en magnetische verschijnselen die we waarnemen.

Door die interactie met het elektromagnetische veld trekken verschillende geladen objecten ook elkaar aan. Het veld kan gezien worden als een soort “boodschapper” die het ene geladen voorwerp vertelt waar het andere zich bevindt. Daarbij speelt ook de grootte van de twee ladingen een belangrijke rol: hoe groter de (netto) ladingen van de voorwerpen, hoe sterker hun invloed op het elektromagnetische veld, en hoe groter daardoor de kracht die de twee geladen voorwerpen op elkaar uitoefenen.



Afbeelding 2. James Clerk Maxwell (1831-1879). Maxwell toonde aan dat elektriciteit en magnetisme verschijningsvormen van dezelfde kracht zijn.

[Naar boven](#)

De fijnstructuurconstante

Opvallend aan elektromagnetische krachten is dat de ladingen die die krachten veroorzaken geen willekeurige waarden kunnen aannemen. Lading is *gequantiseerd*: de elementaire deeltjes in de natuur hebben allemaal een vaste elektrische lading (meestal uitgedrukt als veelvoud van de lading van het elektron), en het zijn altijd *gehele* veelvoud van zulke ladingen die gelijk aan elkaar zijn. Zo is de lading van het positron op een minteken na (dus een factor -1) exact gelijk aan de lading van het elektron. Ook is driemaal de lading van het upquark precies gelijk aan tweemaal de lading van het positron, of -2 maal de lading van het elektron. Enzovoort.

Een gevolg hiervan is dat in elke berekening waarin elektromagnetische verschijnselen een rol spelen, de lading van het elektron voorkomt. Zouden we in een heelal leven waarin die lading een andere waarde had, dan zou de uitkomst van *elk* elektromagnetisch proces anders zijn. De lading van het elektron kunnen we dus zien als een belangrijke natuurconstante, te vergelijken met de snelheid van het licht of de massa van het Higgsdeeltje.

Nu is het bij natuurconstanten altijd zo dat hun getalswaarde afhangt van de eenheden die

we gebruiken. Als we onze lengtemaat “meter” twee keer zo groot zouden kiezen, zou het licht niet met 300.000.000 meter per seconde, maar met 150.000.000 (nieuwe) meters per seconde bewegen. Ook de getalswaarde van de lading van het elektron (meestal gemeten in de ladingsmaat *Coulomb*) heeft dus geen intrinsieke betekenis.

Verrassend genoeg is er echter wel een combinatie van natuurconstanten te construeren waarin de elektrische lading van het elektron voorkomt, en die *wel* een intrinsieke betekenis heeft. Die combinatie, meestal aangeduid met de Griekse letter α , is

$$\alpha = q_e^2 / (2 \epsilon_0 h c)$$

Hierin staat de q_e voor de lading van het elektron, ϵ_0 voor de [elektrische veldconstante](#) die bepaalt hoe gemakkelijk het vacuüm elektrische velden doorlaat, h voor de quantummechanische [constante van Planck](#) en c voor de lichtsnelheid. Het voorkomen van de factor 2 in de bovenstaande uitdrukking is een niet-essentiële keuze die sommige berekeningen iets vereenvoudigt.

Het bijzondere aan deze combinatie van natuurconstanten is dat die geen eenheid heeft: alle eenheden vallen tegen elkaar weg, en de einduitkomst is een eenheidsloos *getal*. Dit is de reden dat de waarde niet verandert als we andere eenheden voor afstand, tijd, enzovoort kiezen. De getalswaarde van α is ongeveer gelijk aan 1/137; dit getal wordt ook wel de *fijnstructuurconstante* genoemd.



Afbeelding 3. Arnold Sommerfeld (1868-1951). Sommerfeld voerde de fijnstructuurconstante in als maat voor de sterkte van de elektromagnetische kracht.

[Naar boven](#)

De gyromagnetische verhouding

De conclusie van de bovenstaande alinea's is de volgende: berekeningen in de theorie van het elektromagnetisme hangen af van de groottes van allerlei natuurconstanten – en in het bijzonder van de lading van het elektron. Om die berekeningen te doen op een manier die niet afhangt van onze arbitraire keuze van eenheden, is het het nuttigst om de antwoorden uit te drukken in termen van de fijnstructuurconstante α .

Laten we een voorbeeld geven van een grootheid die een natuurkundige zou willen uitrekenen: de gyromagnetische verhouding van het elektron. Een *gyromagnetische verhouding* is de verhouding tussen hoe hard een geladen voorwerp draait (preciezer: het *impulsmoment* van een voorwerp) en de grootte van het magneetveld van het voorwerp (preciezer: het *magnetische dipoolmoment*). Voor grote voorwerpen waarin massa en lading gelijkmatig verdeeld zijn, kan berekend worden dat deze verhouding, γ , op een factor 2 na gelijk is aan de verhouding tussen de totale lading q en de totale massa m van het voorwerp:

$$\gamma = q / (2m)$$

Voor microscopische elementaire deeltjes (waarvoor het bijvoorbeeld lastig is om van een “grootte” te spreken) is dit resultaat echter niet juist. Voor het elektron vinden we bijvoorbeeld een bepaalde correctiefactor g :

$$\gamma_e = g \times q_e / (2m_e)$$

De correctiefactor blijkt ongeveer gelijk aan 2 te zijn, maar is niet *exact* 2. Met een ingewikkelde berekening die gebruik maakt van [quantumveldentheorie](#) kan de correctiefactor nauwkeuriger berekend worden: die blijkt gelijk te zijn aan

$$g = 2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \dots$$

Met andere woorden: het antwoord is een *machtreeks* in α ! De getallen c_1, c_2, c_3 , enzovoort, kunnen exact berekend worden: c_1 is bijvoorbeeld gelijk aan $1/(2\pi)$.



Afbeelding 4. Een tol. Als een gelijkmatig elektrisch geladen tol ronddraait is de verhouding tussen zijn impulsmoment en zijn magnetische dipoolmoment gelijk aan de verhouding tussen de massa en de lading, gedeeld door twee. Voor een elementair deeltje zoals een elektron krijgt dit resultaat een correctiefactor, die berekend kan worden als een machtreeks in de fijnstructuurconstante. Foto: Flickr-gebruiker carrotmadman6.

[Naar boven](#)

Een machtreeks als eindantwoord - of niet?

Op dezelfde manier als voor de gyromagnetische verhouding van het elektron, leidt vrijwel elke berekening waarin het elektromagnetische kracht een rol speelt tot een antwoord dat

geschreven kan worden als een machtreeks in de fijnstructuurconstante α . Vaak is dat zelfs de *enige* manier waarop we het antwoord kunnen uitdrukken: exacte antwoorden zijn zelden bekend – ook voor de gyromagnetische verhouding niet.

Het niet berekenbaar zijn van exacte uitkomsten is in de praktijk zelden een probleem. Doordat de fijnstructuurconstante zo'n klein getal is (ongeveer $1/137$) worden de opeenvolgende termen in de machtreeks enorm snel kleiner – vergelijk het voorbeeld van [Achilles en de schildpad](#) in het vorige artikel. We kunnen dus meer en meer termen in de optelsom meenemen, en krijgen zo een steeds betere benadering van het antwoord. Willen we de gyromagnetische verhouding in een experiment tot 13 decimalen achter de komma meten (ongeveer de maximaal haalbare precisie op dit moment), dan rekenen we door tot de termen in de optelsom zo klein worden dat ze alleen bijdragen aan het veertiende decimaal en kleiner. Zo vinden we

$g = 2,0023193043617\dots$

Op deze manier is de uitkomst van de berekening tot op hoge precisie experimenteel getest, en geheel juist gebleken.

Toch is de kous hiermee niet helemaal af: ondanks dat de fijnstructuurconstante zo klein is, blijkt de machtreeks voor de gyromagnetische verhouding van het elektron toch een [divergente](#) reeks te zijn! Als we daadwerkelijk *alle* termen mee zouden nemen in de berekening, zouden we een oneindig groot antwoord vinden. Hoe kan het dan dat de “deelberekeningen” het experimenteel gemeten antwoord zo goed benaderen? En hoe werkt dit voor de andere krachten die we in de natuur tegenkomen? Dat bespreken we in de komende artikelen in dit dossier.

[Naar boven](#)

In het [volgende artikel in deze reeks](#) komen we ‘asymptotische’ machtreeksen tegen, en zien we hoe zulke reeksen natuurkundige antwoorden eerst goed, en vervolgens weer slecht benaderen.

Tijdens de kerstvakantie verschijnen er op de QU-site geen dossier-artikelen. Wel plaatsen we op de komende vrijdagen enkele links naar recente populairwetenschappelijke video's. In

*januari vervolgen we dossiers op **vrijdag** en de overige artikelen op **dinsdag**.*