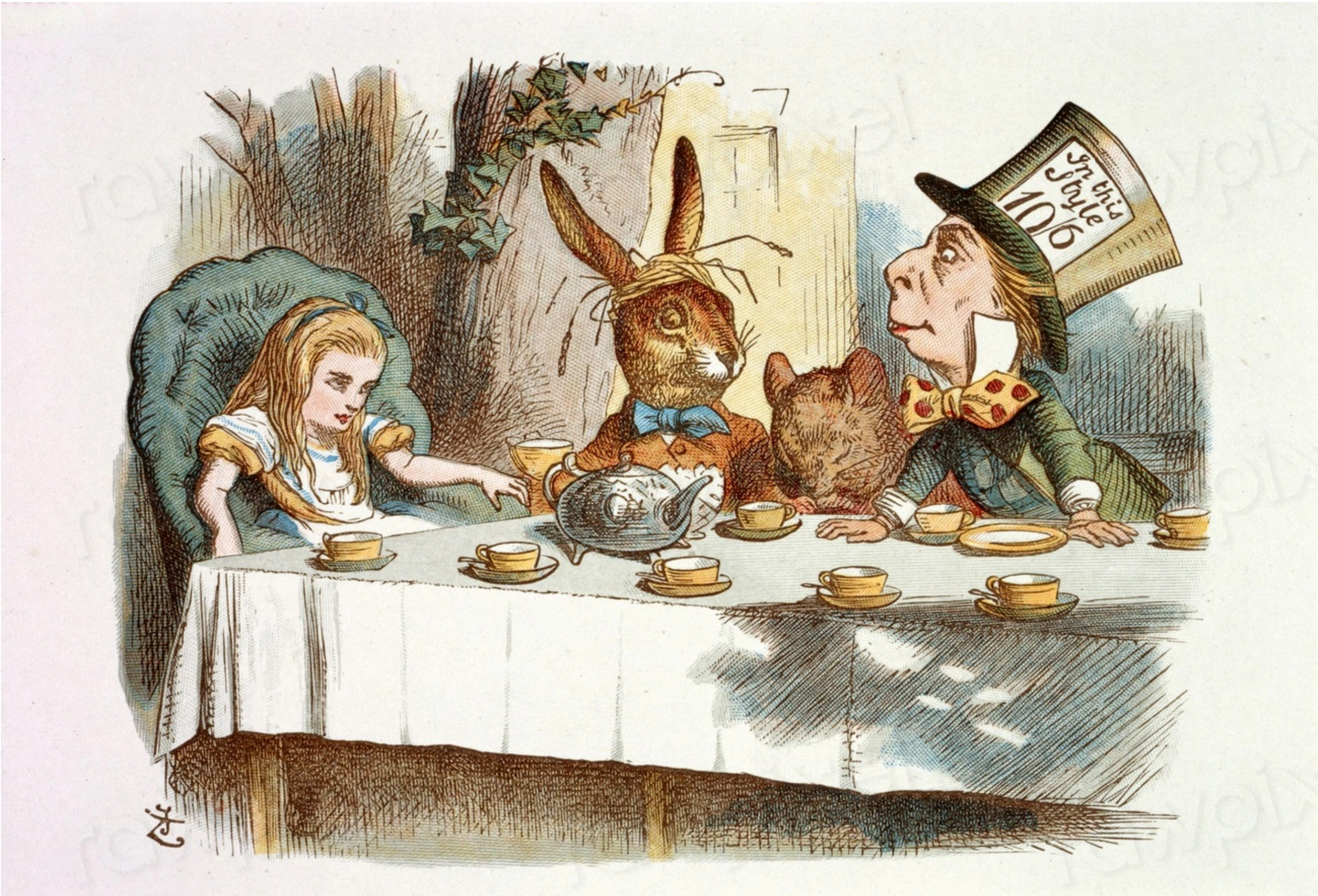
Rekenen met quaternionen

Getallen spelen een centrale rol in de wis- en natuurkunde. Ze zijn er in verschillende soorten en maten. Op zoek naar een uitbreiding van de *complexe getallen* ontdekte de wiskundige William Hamilton een heel nieuwe soort getallen: quaternionen. In dit artikel bespreek ik deze getallen, en een van hun meest vreemde eigenschappen, namelijk dat je moet opletten in welke volgorde je ze vermenigvuldigt.



Afbeelding 1. Een tekening van het thee-feestje uit het boek Alice in Wonderland. Illustratie uit The Nursery “Alice”, “Alice’s Adventures in Wonderland” (1890), geïllustreerd door John Tenniel.

De Ierse wiskundige William Rowan Hamilton kennen natuurkundigen vooral van zijn bijdrage aan de klassieke mechanica. Ook in de wiskunde heeft hij een belangrijke rol gespeeld. Zo was Hamilton de eerste die over complexe getallen nadacht als punten in het tweedimensionale vlak. (Ik gebruik in dit artikel een aantal begrippen uit het hiervoor genoemde artikel, dus lees dat vooral nog eens door.) Hamilton vroeg zich vervolgens af of je op een soortgelijke manier over driedimensionale ruimte kon nadenken. Hamilton was geïnteresseerd in het beschrijven van rotaties in driedimensionale ruimte, en zocht om die reden naar een uitbreiding van de complexe getallen met drie in plaats van twee componenten. Dit bleek lastiger dan verwacht: ‘driedimensionale getallen’ optellen en aftrekken was geen probleem, maar het lukte hem maar niet om voor zulke getallen een consistente vermenigvuldiging te definiëren. Zo schreef hij later in een brief aan zijn zoon:

> *Every morning in the early part of October 1843, on my coming down to breakfast, your brother William Edwin and yourself used to ask me: “Well, Papa, can you multiply triples?” Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head, “No, I can only add and subtract them.”*

Op 16 oktober 1843 maakte hij een doorbraak. Hamiltons grote inzicht was dat hij niet één, maar twee extra componenten nodig had om een kloppende vermenigvuldiging te krijgen. Net zoals je voor complexe getallen twee componenten nodig hebt, een reëel en een imaginair deel, werken de quaternionen alleen als je *vier* componenten gebruikt: met drie lukt het gewoon niet! Zijn ontdekking van de *quaternionen*, zoals deze vierdimensionale getallen zijn gaan heten, wordt binnen de wiskunde gezien als een belangrijke mijlpaal. Hamiltons `eurekamoment’ wordt vaak toegeschreven aan een wandeling langs een kanaal in Dublin. Tijdens deze wandeling zou hij in al zijn enthousiasme de cruciale formule op een brug – de Broom Bridge – hebben gekerfd. Tegenwoordig is er daar een gedenkplaat te vinden met daarop de rekenregels voor quaternionen.

Afbeelding 2. Een gedenkplaat. Op de Broom Bridge in Dublin is nog steeds een aandenken te vinden aan Hamiltons ontdekking: een plaat met de rekenregels voor quaternionen. Foto: William Murphy.

Een quaternion is zoals gezegd een uitdrukking met vier componenten, van de vorm

$$q = a + bi + cj + dk,$$

waar a, b, c en d reële getallen zijn. Naast het imaginaire getal i bevat een algemeen quaternion nog twee `nieuwe' getallen j en k die samen met i aan de volgende rekenregels voldoen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Met de bovenstaande regels kun je met wat puzzelwerk het product van twee willekeurige quaternionen uitrekenen.

Een bijzondere eigenschap van quaternionen is daarbij dat de vermenigvuldiging *niet-commutatief* is, wat betekent dat de volgorde van de getallen in de berekening uitmaakt. Bij gewone getallen is dit niet het geval: twee keer drie en drie keer twee hebben beide dezelfde uitkomst: zes. Voor twee quaternionen maakt de volgorde waarin je ze vermenigvuldigt vaak wel uit. Zo kun je bijvoorbeeld uit de bovenstaande rekenregels afleiden – een leuke oefening voor de enthousiaste lezer! – dat

$$ij = k \qquad \mbox{maar} \qquad ji = -k.$$

De volgorde waarin de getallen i en j staan, maakt dus uit wanneer je hun product uitrekent.

Er is een leuke passage in het boek Alice in Wonderland, waarin niet-commutativiteit een rol speelt[1]. Tijdens het thee-feest zegt de Haas tegen Alice: “zeg wat je bedoelt”. Alice antwoordt vervolgens: “ik bedoel tenminste wat ik zeg – dat is hetzelfde”. “Dat is helemaal niet hetzelfde”, zegt de Haas. “Je kunt net zo goed zeggen dat ‘ik zie wat ik eet’ hetzelfde is als `ik eet wat ik zie’!” Deze woordenwisseling illustreert op een verrassende wijze het niet-commutatieve karakter het na elkaar noemen van bepaalde handelingen. Deze niet-commutativiteit kom je ook op veel andere plekken tegen: bijvoorbeeld bij het oplossen van een Rubiks Kubus, of in de quantummechanica – denk bijvoorbeeld aan *Heisenbergs onzekerheidsrelatie* die iets zegt over de niet-commutatieve vermenigvuldiging van twee matrices. Hamilton heeft laten zien dat we soms ook bij het vermenigvuldigen van bepaalde *getallen* al moeten opletten met de volgorde.

Ben je benieuwd geworden naar de quaternionen? Klik dan op het onderstaande filmpje voor een uitgebreide uitleg van wat ze zijn, en hoe je hun vermenigvuldiging kunt visualiseren.

Noten

[1] Er wordt op sommige plekken gesuggereerd dat de vergelijking met quaternionen nog iets verder gaat, en dat de drie aanwezige leden op het thee-feest, de Mad Hatter, de March Hare en de Dormouse, draaiend om de theetafel, overeenkomen met de drie quaternionen i, j, k. Een vierde lid, in het boek `Time’ genoemd, is niet aanwezig: een toespeling op Hamiltons `missende’ dimensie. Dit klinkt wat vergezocht, ware het niet dat de schrijver van Alice in Wonderland, Charles Dodgson, een Engelse wiskundige was die wat sceptisch was

over de nieuwste ontwikkelingen binnen de wiskunde, waaronder die van quaternionen. Het boek wordt daarom soms geïnterpreteerd als een reactie op de steeds abstracter wordende wiskunde van de negentiende eeuw.