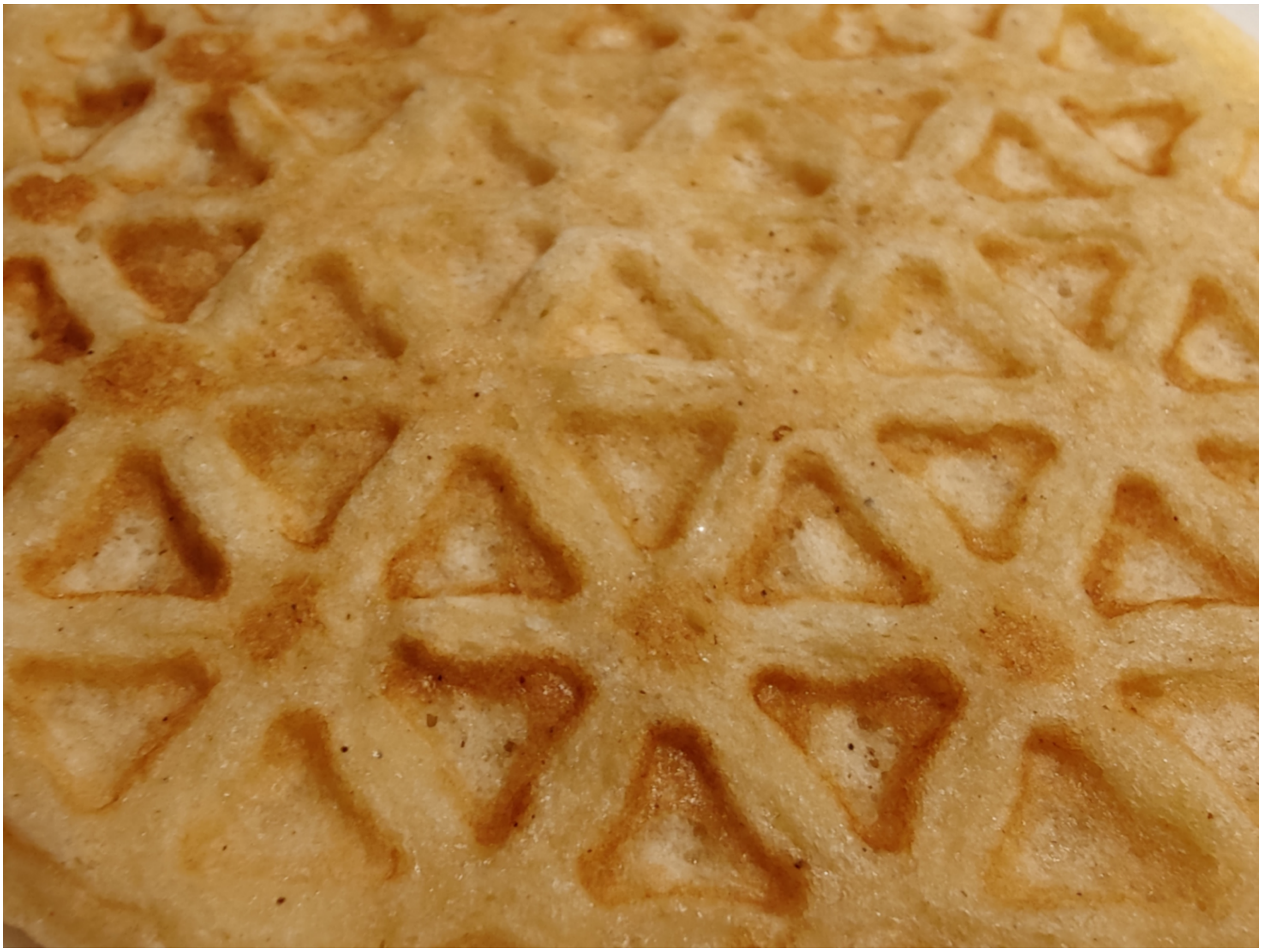
Quantumwetten in een uitdijend heelal

De quantummechanica bestaat intussen al bijna honderd jaar. In al die tijd zijn de fundamenten van deze theorie vrijwel hetzelfde gebleven. Toch blijkt er een flinke tegenspraak te zijn tussen een van deze fundamenten en het uitdijen van het heelal. Gebeurt tijdsevolutie wel op de manier die we al die tijd gedacht hadden? In dit artikel bespreek ik wat de problemen zijn met de tijdsevolutie van een quantummechanisch systeem in een uitdijend heelal en ik zal ook een mogelijke oplossing voor deze problemen laten zien.



Afbeelding 1. Driehoekige wafels. Een foto van een wafel met een driehoekig in plaats van een rechthoekig patroon. Zoals we later in dit artikel zullen zien zijn driehoekige patronen van belang wanneer we quantumveldentheorie bespreken.

Je hebt misschien wel eens gehoord van de Schrödingervergelijking, de basis van de quantummechanica en een van de belangrijkste vergelijkingen in de natuurkunde. Het oplossen van die Schrödingervergelijking geeft je de zogenaamde golffunctie, en dat geeft je de benodigde informatie voor bijvoorbeeld het berekenen van de kans dat je een deeltje op een bepaalde plaats of met een bepaalde impuls zult vinden.

Het oplossen van de Schrödingervergelijking wordt gedaan door het probleem in tweeën te splitsen. Door het eerste probleem op te lossen, de zogenaamde *tijdsonafhankelijke* Schrödingervergelijking, vind je de toestand (dus de golffunctie) van het systeem op een bepaald moment: een zogenaamde statische oplossing. Deze oplossingen maken deel uit van een **Hilbertruimte**. Dat is geen ruimte is zoals wij die kennen, maar een abstracte wiskundige verzameling. Het grootste werk in het oplossen van de Schrödingervergelijking zit in dit eerste probleem en dit is in de overgrote meerderheid van de gevallen zelfs niet exact op te lossen. Het waterstofatoom, het simpelste atoom dat er is, is zo ongeveer het moeilijkste systeem waarvoor we de golffunctie nog exact kunnen vinden.

Het tweede probleem is echter eenvoudig en in elke situatie hetzelfde. Als je dit oplost, dan vind je de **tijdsevolutie-operator**. Door de gevonden toestand uit het eerste deel van dit probleem met de tijdsevolutie-operator te vermenigvuldigen, kan je de toestand van een systeem op elk gewenst moment vinden en kan je dus de gehele tijdsevolutie van het systeem in kaart brengen. Een belangrijke eigenschap van de tijdsevolutie-operator is dat deze **unitair** is. Dit betekent dat tijdsevolutie zowel vooruit als achteruit hetzelfde is. Dat wil zeggen; als je het systeem voorwaarts in de tijd evolueert, en dan weer terug naar het startpunt, dat hetzelfde resultaat oplevert als wanneer je het systeem eerst achteruit evolueert en daarna weer voorwaarts. In beide gevallen vind je de oorspronkelijke toestand waar je mee begon. Dit lijkt vanzelfsprekend, en daarom is unitariteit ook meestal een belangrijke voorwaarde die aan tijdsevolutie wordt gesteld. Sterker nog: dat de tijdsevolutie-operator unitair is, zit bewust ingebakken in de Schrödingervergelijking en is daarom ook een van de axioma's waar de vergelijking uit voortkomt. Zoals we echter zullen zien is unitaire tijdsevolutie in een dynamische ruimtetijd helemaal niet zo vanzelfsprekend. Dat heeft te maken met het feit dat tijdsevolutie unitair is, waaruit volgt dat die tijdsevolutie het product[1] tussen verschillende toestanden in de Hilbertruimte en ook het aantal dimensies van de Hilbertruimte behoudt.

Het probleem met unitaire tijdsevolutie

Dat laatste, het feit dat unitaire tijdsevolutie het aantal dimensies van de Hilbertruimte behoudt, is ook meteen waar de schoen wringt. Het aantal dimensies van de Hilbertruimte staat namelijk gelijk aan het aantal vrijheidsgraden van het systeem. In de quantumveldentheorie zijn de objecten die het systeem vormen de velden, en een veld heeft een waarde, en dus een vrijheidsgraad, op elke positie en op elk moment in de ruimtetijd. Nu dijt ons heelal uit, en juist in een uitdijend universum leidt dit tot problemen. Losjes gezegd komt er wanneer de tijd vordert steeds meer ruimte bij naarmate het universum uitdijt en dus zou je zeggen dat er ook meer vrijheidsgraden bij moeten komen en dat het aantal dimensies van de Hilbertruimte moet toenemen.

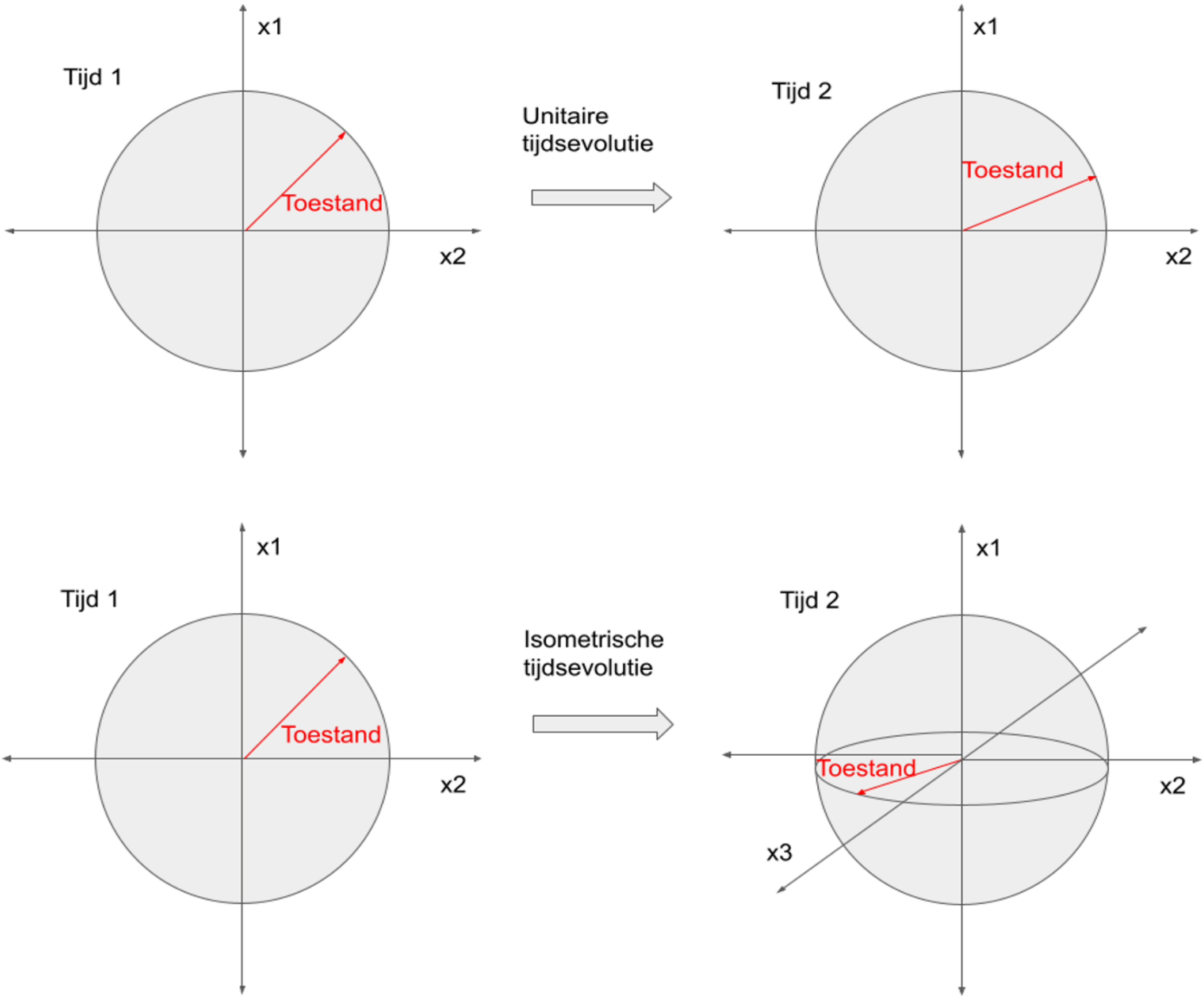
Nu is dit nog niet per se een probleem: als de posities waarbij die vrijheidsgraden horen oneindig dicht op elkaar zitten, dan zijn er te allen tijde oneindig veel vrijheidsgraden en is de dimensie van de Hilbertruimte ook oneindig. Zo bekeken lijken er in een groter heelal dus niet ‘meer’ vrijheidsgraden te zijn. Er zijn echter een aantal belangrijke redenen waarom een quantumveldentheorie op lengteschalen kleiner dan grofweg de zogeheten Plancklengte (zo’n 10^{-35} m), slecht gedefinieerd is. Sterker nog, modern onderzoek zet grote vraagtekens bij het bestaan van de ruimtetijd op zulke kleine lengteschalen, wat een onderliggende motivatie is achter het onderzoeksgebied van de emergente zwaartekracht, dat stelt dat de ruimtetijd een emergente eigenschap is van een ander, fundamenteler proces. Het is daarom ook redelijk om te denken dat er geen vrijheidsgraden zijn op lengteschalen kleiner dan de Plancklengte. Aangezien er dan tijdens de uitdijing van het universum steeds meer Plancklengtes bijkomen, kunnen we wel stellen dat het aantal vrijheidsgraden, en dus het aantal dimensies van de Hilbertruimte, toch moet stijgen naarmate de tijd vordert – wat in directe tegenspraak is met de stelling dat tijdsevolutie unitair moet zijn!

De oplossing: isometrische tijdsevolutie

Dat dit een probleem is, werd recent onder de aandacht gebracht in een artikel van Andrew Strominger en Jordan Cotrel [CS], waarin ze ook een oplossing suggereren en die uitwerken voor een aantal interessante gevallen. Volgens Strominger en Cotrel is namelijk de eis dat tijdsevolutie unitair moet zijn te streng. Ze vallen liever terug op ‘isometrische tijdsevolutie’, dat wil zeggen, tijdsevolutie van de toestand door die te vermenigvuldigen met een zogeheten *isometrische* en niet een *unitaire* operator. Ook isometrische operatoren behouden het product tussen twee toestanden in de Hilbertruimte, iets wat van groot belang is, want zo’n product is namelijk vaak iets wat meetbaar is binnen je theorie, zoals de kans een deeltje op een bepaalde plek terug te vinden. Ook geldt voor isometrische tijdsevolutie nog steeds dat nadat je een toestand terug in de tijd en vervolgens weer voorwaarts naar hetzelfde moment terug evolueert, je de oorspronkelijke toestand terugvindt. Dit keer geldt echter niet per se hetzelfde wanneer je eerst vóóruit in de tijd gaat en dan áchteruit. Alleen als dat laatste ook geldt spreken we van een unitaire operator.

Dat die eigenschap geen vereiste is voor isometrische tijdsevolutie, zorgt er ook voor dat het voor isometrische tijdsevolutie is toegestaan dat de dimensie van de Hilbertruimte – en dus het aantal vrijheidsgraden – groeit, zoals je in een uitdijend universum zou verwachten.

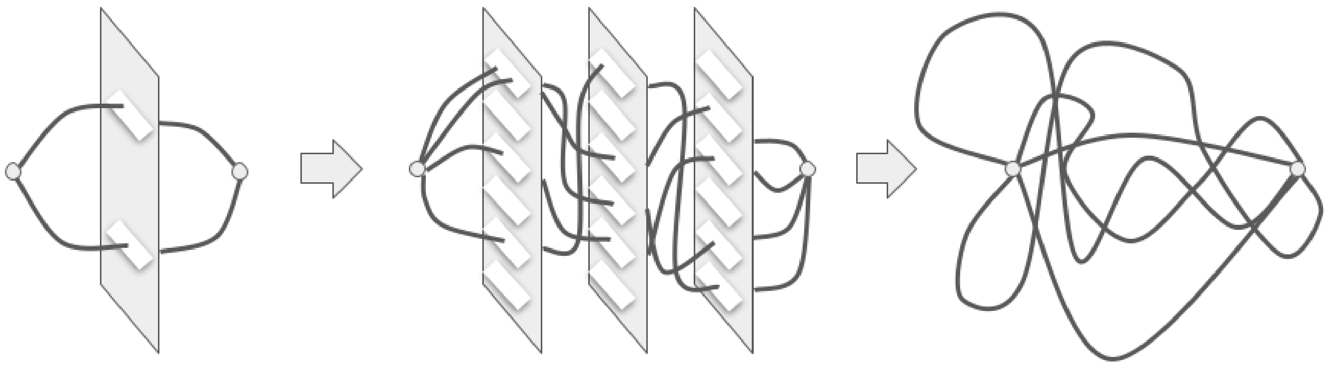
Unitaire operatoren zijn dus eigenlijk een subklasse van isometrische operatoren, ofwel: unitaire operatoren zijn isometrische operatoren met een extra voorwaarde die ervoor zorgt dat de dimensie van de Hilbertruimte hetzelfde blijft. Dit is ook te zien in afbeelding 2, waar wordt getoond hoe de Hilbertruimte verandert voor beide soorten operaties. Het feit dat het product tussen toestanden hetzelfde moet blijven wordt weergeven met een cirkel, of een bolschil, die de grootte van een toestand in de Hilbertruimte laat zien. Als je een toestand immers met zichzelf vermenigvuldigt, krijg je het kwadraat van de lengte, en aangezien dat behouden moet zijn, moet ook de lengte zelf behouden blijven – de toestand blijft dus op dezelfde cirkel of bolschil liggen. In de onderste afbeelding is te zien hoe voor isometrische tijdsevolutie wel het aantal dimensies van de Hilbertruimte groeit, zoals we wilden.



Afbeelding 2. De Hilbertruimte voor unitaire en voor isometrische tijdsevolutie.
Deze afbeelding toont zowel unitaire tijdsevolutie (boven), als isometrische tijdsevolutie

(onder) van de Hilbertruimte. De cirkels en de bolschil tonen wat de behouden lengte van de toestand, gemarkeerd in het rood, moet zijn. Daarnaast kan je zien hoe bij unitaire tijdsevolutie het aantal dimensies van de Hilbertruimte constant blijft, terwijl het bij isometrische tijdsevolutie groeit.

Het mooie van deze isometrische tijdsevolutie is volgens Strominger en Cotrel ook dat het in veel gevallen automatisch tevoorschijn komt, zonder dat we deze eis a priori in onze theorie stoppen. Je vraagt je misschien af hoe dit kan. We bepalen de tijdsevolutie-operator immers met de Schrödingervergelijking, en daar zit unitariteit al ingebakken. Dat is zeker waar, maar gelukkig zijn er alternatieve formuleringen van de quantummechanica, zoals bijvoorbeeld een formulering, bedacht door de natuurkundige Richard Feynman, die bekend staat als de ‘padintegraal’. Je hebt misschien wel eens gehoord dat in de quantummechanica een deeltje alle mogelijke paden kiest, bijvoorbeeld in het *tweespletenexperiment*, waarin klassiek een deeltje door één van twee spleten reist, maar quantummechanisch het deeltje door allebei de spleten gaat. Als je nu in gedachten oneindig veel schermen met oneindig veel spleten neerzet, heb je een beeld van Feynman’s padintegraal, waarin een deeltje tegelijk alle mogelijke spleten van alle schermen doorloopt, en dus alle mogelijke paden doorloopt. Dit gedachte-experiment is te zien in afbeelding 3.



Afbeelding 3. De padintegraal als som van alle mogelijke paden. Deze afbeelding toont hoe je de padintegraal in de quantummechanica kan voorstellen als verlengde van het bekende tweespletenexperiment, door steeds meer schermen met steeds meer spleten neer te zetten tot een deeltje alle mogelijke paden door de ruimte doorloopt.

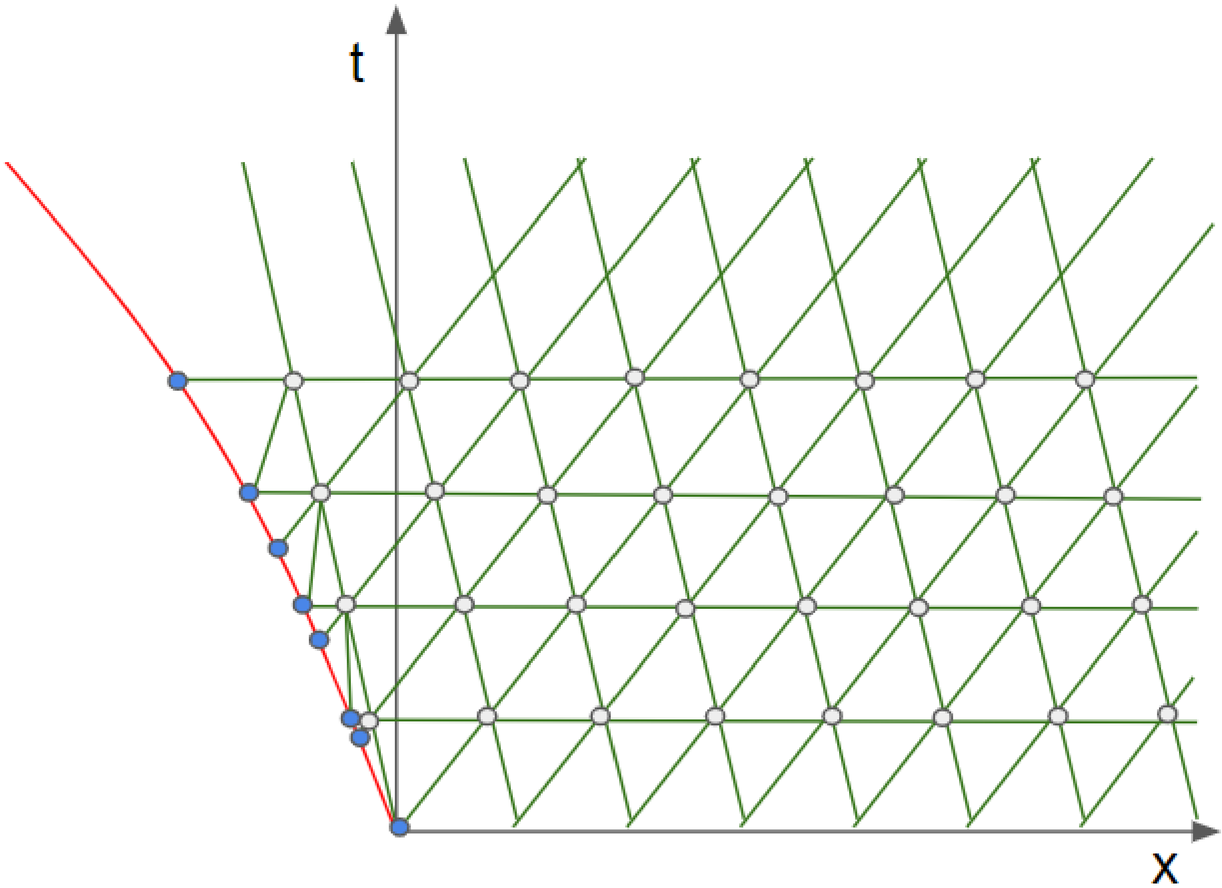
Een bijkomend voordeel van de padintegraal, naast het feit dat deze methode een intuïtiever plaatje geeft van wat er achter de schermen gebeurt en het feit dat de formulering goed samengaat met Einsteins speciale relativiteitstheorie, is dat de techniek niet bij voorbaat al isometrisch of unitair is. Het is wel vaak gebruikelijk om deze eigenschap óók te eisen van de theorie. Sterker nog: toen Feynman zijn formalisme voor het eerst presenteerde, was het eerste wat Paul Dirac, de vader van de quantumveldentheorie, vroeg: “Is het unitair?’’. Feynman had geen antwoord op die vraag.

In de quantummechanica – dus zolang het niet over velden gaat – is het gebruik van de padintegraal niet erg praktisch. Daarom gebruikt men daar ook meestal Schrödingers formulering. De padintegraal is echter wel gemakkelijk te generaliseren naar quantum*velden*theorie, waar het concept alomtegenwoordig is. In de quantumveldentheorie is het fundamentele object een veld – denk aan het elektrische of magnetische veld – in plaats van een deeltje. Zoals al eerder genoemd heeft zo’n veld op elke mogelijke plaats en elk moment in de ruimtetijd een bepaalde waarde. In plaats van alle mogelijke *paden* van een deeltje op te tellen, doet de padintegraal in de quantumveldentheorie dat met alle mogelijke *veldconfiguraties*. De tijdsevolutie-operator waarin we geïnteresseerd zijn noemen we hier de *propagator*, maar het speelt in feite dezelfde rol, in de zin dat het je in staat stelt de veld configuratie op een bepaald moment te vinden, gegeven de veld configuratie op een ander moment. Het ‘propageert’ je staat van het ene naar het andere moment.

Een voorbeeld: quantumveldentheorie op een uitdijend rooster

Het is niet in zijn algemeenheid te zeggen of een propagator in een quantumveldentheorie isometrisch maar niet unitair is. Wat wel mogelijk is, is dat we naar een specifiek voorbeeld kijken waarin we dit wel kunnen bepalen, en dat is precies wat Cotler en Strominger deden. Misschien het meest relevante voorbeeld wat ze geven, voor ons verhaal tenminste, betreft quantumvelden op een ‘rooster’. In plaats van op oneindig veel plaatsen in de ruimtetijd een waarde te hebben, heeft het veld alleen een waarde op de hoekpunten van zo’n rooster. Dit is niet zo’n gek idee, omdat quantumveldentheorie op heel kleine lengteschalen al snel tot problemen leidt, bijvoorbeeld dat de kans die je berekent voor bepaalde interacties tussen velden oneindig groot wordt. Een rooster zorgt dat dit onder controle blijft, maar geeft ook de standaard, continue theorie, terug in de limiet dat de afstand tussen de roosterpunten naar 0 gaat en het rooster oneindig groot is.

Een mogelijk rooster voor een uitdijende, tweedimensionale ruimtetijd ziet eruit zoals in afbeelding 4, waar de ruimtetijd uitdijt in de x-richting, uitgebeeld met een rode lijn die naar links buigt. Je ziet duidelijk dat er na verloop van tijd meer roosterpunten bij moeten komen. De reden dat het rooster driehoekig is, is dat zo'n driehoekig rooster zich aan alle mogelijke vormen van een ruimte kan aanpassen, terwijl dat voor een rechthoekig rooster niet mogelijk is. Voor uitdijende of gekromde ruimtes heb je dus een driehoekig rooster nodig.



Afbeelding 4. Een uitdijend driehoekig rooster. Deze afbeelding toont een 2-dimensionaal rooster (met een tijdsdimensie en een ruimtelijke dimensie), dat uitdijt in de x-richting, aangegeven met de rode lijn die naar links buigt. Na verloop van tijd komen er meer roosterpunten bij.

Het blijkt mogelijk te zijn om de padintegraal die je de propagator geeft, om te schrijven naar een eenvoudigere uitdrukking door de velden op dit rooster te definiëren, dat wil zeggen, ze alleen een waarde te geven op de roosterpunten[2]. De punchline: de propagator die je hieruit berekent, blijkt wel isometrisch en niet unitair te zijn! Niet zo gek, eigenlijk, aangezien we in afbeelding 4 al zien dat het aantal roosterpunten en dus vrijheidsgraden toeneemt, en daarmee ook het aantal dimensies van de Hilbertruimte. Dat isometrische tijdsevolutie in een vrij generieke situatie zoals deze tevoorschijn komt is ontzettend mooi en een aanzienlijke verbetering ten opzichte van de strikte eis van unitaire tijdsevolutie.

Het bovenstaande voorbeeld staat niet op zichzelf. Ook bij onderwerpen in de frontlinie van de moderne fysica zijn isometrieën te vinden, zoals de verdamping van een zwart gat, die je kunt gemodelleren met een versnellende spiegel, een vraagstuk dat raakt aan de informatieparadox van zwarte gaten. Ook zijn er consequenties voor de zogeheten AdS/CFT-dualiteit, een recente ontwikkeling die een belangrijke relatie beschrijft tussen zwaartekracht en quantumveldentheorie, en die ook weer een rol speelt bij de zojuist genoemde informatieparadox. Ook hier wordt de tijdsevolutie weer beschreven door een isometrie. Voor wie de eerdere artikelen over AdS/CFT heeft gelezen: als je een qubit in een AdS ruimte zet, de AdS ruimte uitdijt en de schil van die ruimte een zogenaamde de Sitter ruimte is, dan wordt de tijdsevolutie van de qubits op die de Sitter schil ook beschreven door een isometrie.[3]

Conclusie

Als isometrieën de beschreven tegenstrijdigheid wegnemen, en ook op natuurlijke wijze naar voren komen, zou je denken dat het idee dat tijdsevolutie isometrisch moet zijn nu overal overgenomen wordt. Dit is echter nog niet het geval, en er zijn ook nog wel wat kanttekeningen te plaatsen. Zo zou unitariteit namelijk behouden kunnen worden door te zeggen dat alle fysieke toestanden deel uitmaken van een Hilbertruimte die zelf onderdeel is van een grotere Hilbertruimte. De grotere Hilbertruimte kan dan groeien, zoals we willen, maar de fysische toestanden blijven in een subruimte hiervan die even groot blijft. De evolutie van de fysische toestanden wordt dan dus alsnog door een unitaire operator beschreven. De grotere Hilbertruimte speelt dan wel nog steeds een rol, in de zin dat er naarmate de tijd verstrijkt een steeds grotere en grotere Hilbertruimte nodig is om de natuurkunde 'lokaal te houden', wat inhoudt dat, als een gebeurtenis iets beïnvloedt op een andere plaats in de ruimte, er iets in de ruimte daartussen moet zijn dat de invloed van die gebeurtenis overdraagt naar de andere plaats. Als dit niet het geval is noemt men dat in vaktermen ook wel '*spooky action at a distance'.*

Ten slotte weten we ook niet goed hoe we met isometrieën een *krimpend* universum zouden moeten beschrijven, waarin ook de Hilbertruimte zou krimpen. Een probleem dat hierbij zou optreden, is dat de golflengte van bijvoorbeeld licht dan ook mee krimpt, wat zou betekenen dat we uiteindelijk in een regime komen waar de effecten van quantumzwaartekracht – zwaartekracht op de allerkleinste schaal – van belang worden; een onderwerp waar we nog vrij weinig van weten. Dit kan misschien een aanwijzing zijn dat tijdsevolutie alleen mogelijk is met groeiende Hilbertruimten en we dus alleen in een universum kunnen leven waarin we uitdijing van het heelal observeren.

Kortom, er zijn nog genoeg open vragen en er is nog veel te leren over hoe isometrische tijdsevolutie precies werkt en wat de consequenties zijn voor allerlei problemen waarin we geïnteresseerd zijn!

Referentie

[CS] Jordan Cotler en Andrew Strominger, *The Universe as a Quantum Encoder*.

---

[1] Voor de ingewijden: hier gaat het om het zogeheten ‘inproduct’.

[2] Als je denkt dat dit problematisch is, bedenk je dan dat de afstand tussen de roosterpunten typisch de ordegrootte van de Planckschaal (10^{-35} m) heeft, dus dat je het veld nog steeds ‘bijna overal’ een waarde geeft.

[3] Deze isometrie is zelfs een zogenaamde quantum error correcting code. Dit is ook waar het artikel dat we bespreken zijn naam aan ontleent.