Pi benaderen met pasta

Wist je dat je met behulp van pasta het getal pi kunt benaderen? In dit artikel vertel ik je hoe je dat doet, maar vooral ook waarom de methode werkt. Do try this at home!

Afbeelding 1. Penne. Foto via Picryl.

Begin met wat langwerpige pasta – als voorbeeld neem ik penne. Meet de lengte van de pasta. Laten we in dit voorbeeld zeggen dat de lengte van 1 penna 4 cm is. Vervolgens pak je een groot papier en teken je hier vier parallelle lijnen op – meer mag trouwens ook. De afstand tussen de lijnen moet gelijk zijn aan twee keer de lengte van de pasta, dus in dit geval 8 cm.

Strooi nu je pasta willekeurig over het vel uit, op zo'n manier dat er geen pasta buiten de buitenste lijnen komt te liggen. Stel bijvoorbeeld dat we dit doen met 50 penne. Tel nu het aantal penne dat een van je 4 getekende lijnen doorkruist. Zo vind je misschien dat 16 van de 50 een van de lijnen kruisen. Als je deze twee getallen door elkaar deelt, (aantal pasta's / aantal pasta's dat een lijn kruist), dus in dit geval 50/16, vind je een antwoord dat gelijk is aan 3,125 – een getal dat dicht bij pi (3,1416) komt!

Het onderliggende vraagstuk heet de ‘naald van Buffon’, wat oorspronkelijk trouwens niet een probleem was om pi mee te benaderen. De originele vraag was: *stel dat we een vloer hebben gemaakt van parallelle stukken hout, allemaal even breed, en we laten een naald op de vloer vallen. Wat is dan de kans dat de naald op de lijn tussen twee delen hout ligt?* Dit probleem kun je oplossen door integralen te gebruiken. Laten we daar voor de wiskundeliefhebbers eens naar kijken.

We beginnen met het probleem wat wiskundiger te formuleren, namelijk: als ik een naald heb van lengte ℓ, en die laat ik vallen op een oppervlak met parallelle lijnen op een afstand t van elkaar, wat is dan de kans dat de naald op een lijn ligt? Laten we de afstand van het midden van de naald tot de dichtstbijzijnde parallele lijn x noemen, en de hoek tussen de naald en parallele lijn θ. De kansdichtheid om x te vinden tussen 0 en $\frac{t}{2}$ ziet er als volgt uit:

$$f_X(x) = \frac{2}{t} \qquad \mbox{als} \qquad 0 \leq x \leq \frac{t}{2}.$$

De waarde $x = 0$ betekent dat de naald precies midden op de lijn ligt, en $x = \frac{t}{2}$ betekent dat een naald perfect gecentreerd ligt tussen twee lijnen. De waarde van x kan niet kleiner dan 0 of groter dan $\frac{t}{2}$ zijn, dus daarbuiten is de kansdichtheid nul. Deze formule voor de kansdichtheid gaat ervan uit dat de kans even groot is dat de naald érgens binnen dit bereik valt, maar niet daarbuiten kan vallen – vandaar dat je de pasta niet buiten de lijnen mocht strooien.

We kunnen hetzelfde doen voor θ in plaats van x, waarbij we als goede wiskundigen θ natuurlijk in radialen meten. Dan vinden we dat de kansdichtheid om een waarde van θ tussen 0 en $\pi/2$ (dus negentig graden) te vinden, gelijk is aan

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi} \qquad \mbox{als} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

Hier betekend $\theta = 0$ dat de naald parallel ligt aan de lijnen, en $\theta = \pi/2$ dat de naald loodrecht op de lijnen ligt. Waarden daarbuiten zijn weer niet mogelijk, dus daar is de kansdichtheid nul.

De waardes voor θ en x die je zult vinden zijn niet aan elkaar gerelateerd (de hoek van de pasta hangt niet af van de plek of omgekeerd), en hun kansdichtheden dus ook niet. Om de twee te combineren kunnen we ze daarom vermenigvuldigen. We vinden dan het volgende voor de kansdichtheid:

$$f_{X\Theta}(x,\theta) = \frac{4}{t\pi} \qquad \mbox{als} \qquad 0 \leq x \leq \frac{t}{2} \qquad \mbox{en} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

De laatste vraag is nu: voor welke waarden van x en θ doorkruist de naald de lijn? Je kunt voor jezelf een plaatje tekenen om het antwoord te vinden: als x kleiner of gelijk is aan $m(\theta) = 2 \ell \sin(\theta)$, doorkruist de naald een lijn.

Daarmee hebben we het hele probleem omgezet in wiskunde, en hoeven we ‘alleen nog maar’ een integraal uit te rekenen om de gevraagde kans P uit te rekenen. Die integraal ziet er als volgt uit:

$$P = \int_{\theta = 0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{m(\theta)} \frac{4}{t \pi} dx d\theta.$$

Wie handig is met integreren moet het vooral eens zelf proberen; neem daarbij bijvoorbeeld aan dat ℓ groot genoeg is om de bovengrens $m(\theta)$ voor x altijd te kunnen bereiken. Als het goed is vind je dan dat

$$P = \frac{2\ell}{t \pi}.$$

Oké, al die wiskunde is leuk en aardig, maar hoe vind je als je dit antwoord eenmaal bereikt hebt, daadwerkelijk π? We kunnen die vraag terugvertalen naar ons voorbeeld aan het begin. De kans P is zoals we nu weten gelijk aan $\frac{2 \ell}{t \pi}$. Stel nu dat we n naalden laten vallen, en h van die n naalden kruisen een lijn. De kans P zou dan goed benaderd moeten worden door h/n. Dit vullen we in in onze formule voor P:

$$\frac{h}{n} = \frac{2 \ell}{t \pi}.$$

Nu zien we waarom we de afstand tussen de lijnen tweemaal zo groot als de lengte van de naald – of in ons geval: de pasta – wilden nemen. Als we die waarde $t = 2 \ell$ ook invullen, vinden we namelijk

$$\frac{h}{n} = \frac{1}{\pi}.$$

Omgekeerd: $n/h = \pi$; precies zoals we aan het begin van het artikel beweerden. En zo kun je dus de waarde van π vinden met pasta!