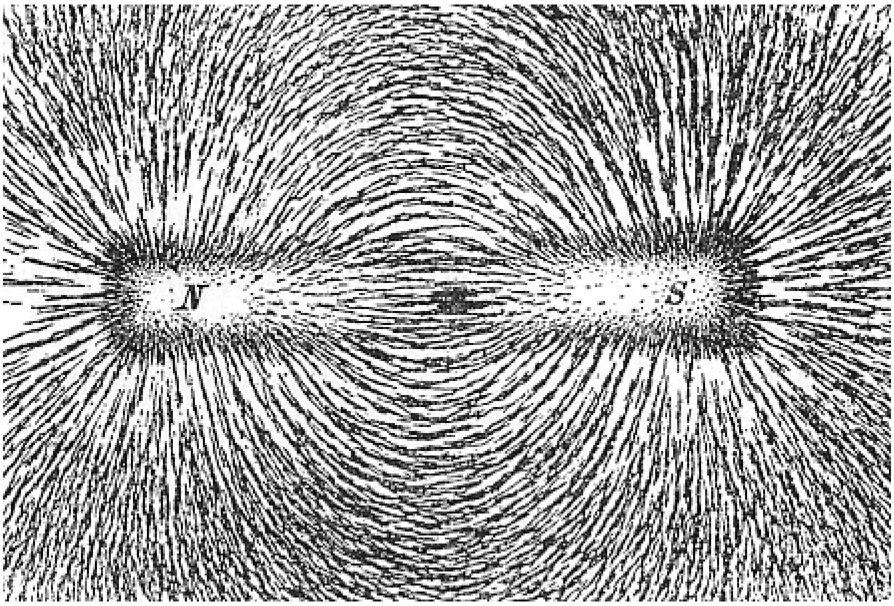
Oneindige torens van deeltjes

Maak een verre wandeling, en je komt vanzelf bijzondere dingen tegen. Voor theorieën van quantumzwaartekracht lijkt een soortgelijk verschijnsel plaats te vinden. Leggen we namelijk een lange afstand af in de zogenaamde veldenruimte van deze theorieën, dan lijkt het erop dat we een oneindige toren aan lichte deeltjes tegenkomen. In dit artikel neem ik dit merkwaardige vermoeden onder de loep.

Afbeelding 1. Een toren van legoblokken. De blokken zijn verticaal gerangschikt; op een soortgelijke manier kunnen we ook de bouwstenen van een natuurkundige theorie rangschikken. Foto: [Efraimstochter](https://www.quantumuniverse.nl/oneindige-torens-van-deeltjes).

Natuurkunde en veldentheorie

Velden spelen een centrale rol in hoe natuurkundigen de wereld om ons heen beschrijven. Laat ik daarom beginnen met uit te leggen wat velden precies zijn. In de meest abstracte zin is een veld een wiskundige functie die aan ieder punt in onze ruimtetijd een bepaalde waarde koppelt. Neem bijvoorbeeld de temperatuur. Vlakbij de kachel is het warmer dan in het vriesvak van de koelkast, dus geeft het ‘temperatuurveld’ op verschillende plekken in ons huis een andere waarde aan. Een iets ingewikkelder voorbeeld is het elektromagnetische veld. Leg tussen twee magneten een hoopje ijzervijlsel op een vel papier en het vijlsel zal het patroon van de veldlijnen tussen de twee magneten overnemen. Hierbij heeft het elektromagnetische veld behalve een grootte dus ook een richting. Op ieder punt wijst het veld namelijk met een bepaalde sterkte langs de veldlijnen.



Afbeelding 2. Magnetische veldlijnen. Het elektromagnetische veld rond een magneet wordt zichtbaar als we ijzervijlsel gebruiken. Afbeelding: Newton Henry Black.

In de hedendaagse natuurkunde worden velden veelal gebruikt om deeltjes te beschrijven met behulp van quantumveldentheorie. Het idee is dat excitaties – een bepaald soort trillingen – van deze velden overeenkomen met de deeltjes die wij zien. Zo komen de excitaties van het elektromagnetische veld overeen met het foton, het lichtdeeltje dat een belangrijke rol speelt in ons begrip van de elektromagnetische kracht. In dit artikel zal ik deze quantummechanische interpretatie van velden grotendeels achterwege laten, en focussen we ons vooral op de klassieke beschrijving van velden: functies die een waarde koppelen aan punten in onze ruimtetijd.

Het afstandsvermoeden

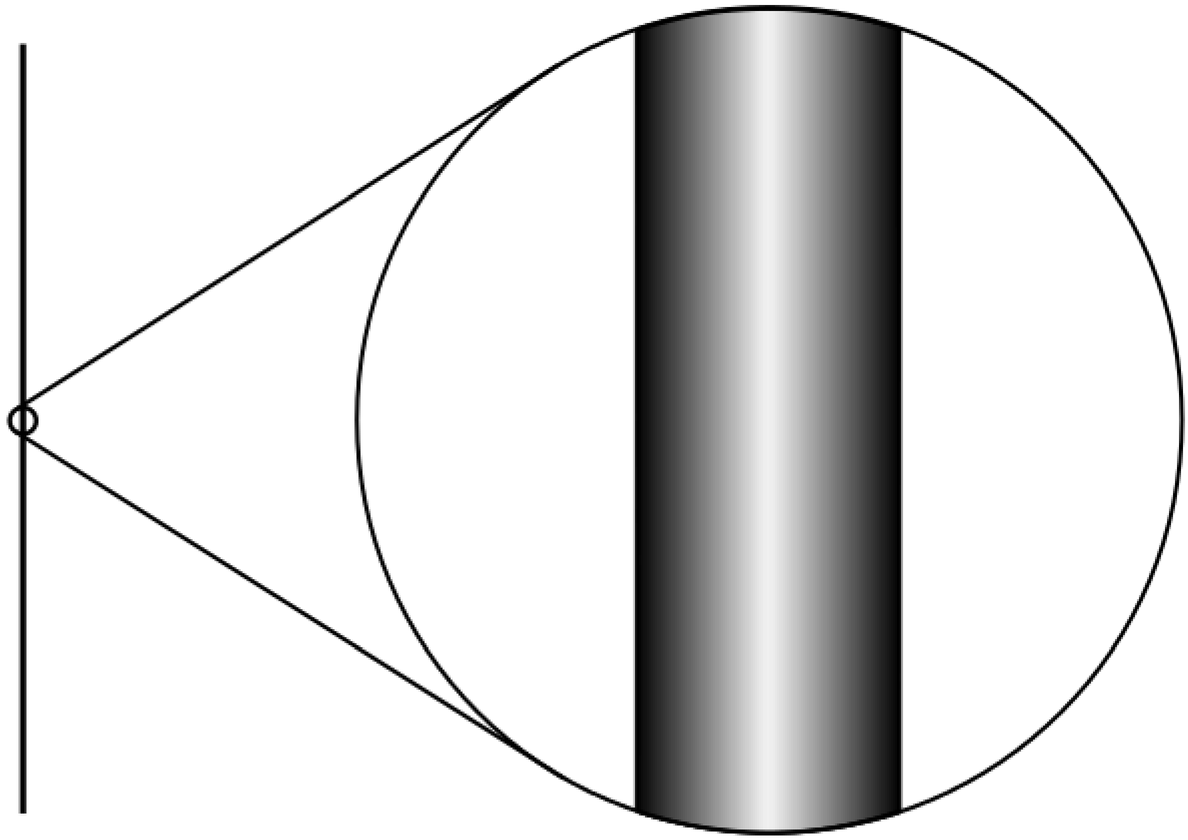
Het idee is nu dat we de ‘ruimte’ waarin deze velden waardes aannemen, de zogenaamde *veldenruimte*, gaan bestuderen. Voor bijvoorbeeld het temperatuurveld begint deze ruimte bij -237,15°C, het absolute minimum voor de temperatuur, en loopt daarna oneindig ver door. In andere woorden, meetkundig bezien is de veldenruimte een ‘halve’ lijn met één eindpunt en één oneindige richting.

In 2006 kwamen de theoretisch natuurkundigen Hirosi Ooguri en Cumrun Vafa tot een bijzonder vermoeden toen ze deze veldenruimtes bestudeerden. Zij merkten namelijk op dat, wanneer ze voor bepaalde klassen van natuurkundige modellen een lange afstand in deze veldenruimte aflegden, ze ook modellen met een oneindige ‘toren’ aan deeltjes tegenkwamen. Daarmee bedoelen we een verzameling van deeltjes waarvan de één steeds iets zwaarder is dan de ander; als je ze op massa zou rangschikken zouden ze dus een ‘toren’ vormen. In de modellen die Ooguri en Vafa bestudeerden werden de individuele deeltjes in de toren bovendien steeds lichter naarmate ze verder ‘bewogen’ in de veldenruimte. Dit motiveerde de onderzoekers om het *afstandsvermoeden* op te stellen: voor theorieën van quantumzwaartekracht gaan oneindige afstanden in de veldenruimte altijd samen met oneindige torens aan massaloze deeltjes.

Maar hoe speelt quantumzwaartekracht hier dan precies een rol? Een van de grote open problemen binnen de natuurkunde is het verenigen van de quantummechanica en de algemene relativiteitstheorie tot één consistente theorie van quantumzwaartekracht. Een kandidaat om dit probleem op te lossen is de snaartheorie. Snaartheorie is een model voor onze natuurkunde dat verschillende deeltjes beschrijft als verschillende trillingen van snaren. Nu keken Vafa en Ooguri dus niet naar zomaar een klasse aan natuurkundige modellen, maar naar veldenruimtes die uit de snaartheorie voortkomen. Door de eigenschappen van deze natuurkundige modellen goed te bestuderen, hoopten ze te ontrafelen wat een theorie van quantumzwaartekracht onderscheidt van een theorie waarin quantummechanica en zwaartekracht niet verenigd kunnen worden. Om deze twee verzamelingen van modellen een handige naam te geven, verwijzen we ook wel naar de modellen die consistent zijn met quantumzwaartekracht als het *landschap*, terwijl de inconsistente modellen in het *moerasland* liggen. Het afstandsvermoeden is één van de voorstellen voor de eigenschappen die een theorie van quantumzwaartekracht – een theorie in het landschap, dus – moet hebben.

Een voorbeeld: extra dimensies oprollen

Laten we, om het afstandsvermoeden wat concreter te maken, naar een voorbeeld kijken. Een van de eigenaardigheden van snaartheorieën is dat deze natuurkundige modellen extra dimensies nodig hebben om wiskundig consistent te zijn. Wij zien een vierdimensionale wereld om ons heen – drie voor ruimte en één voor tijd – maar snaartheorie leeft in een tiendimensionale wereld. Om van deze extra dimensies in het model af te komen en onze echte natuur te kunnen beschrijven, worden ze door natuurkundigen zogezegd opgerold. De extra dimensies in het model worden zo klein gemaakt dat we ze niet kunnen waarnemen. Een handige analogie om dit iets duidelijker te maken, zien we als we de tiendimensionale ruimtetijd vervangen door een gespannen koord. Voor een koorddanser is dit koord ééndimensional, want hij kan alleen voor- of achteruit lopen. Voor een klein insect zoals een mier daarentegen is het koord tweedimensionaal, want de mier kan ook rondom het koord lopen. Zo zien we dus dat afhankelijk van ons perspectief het koord één of twee-dimensionaal is, en dat we pas op de allerkleinste schaal de extra dimensie waarnemen.

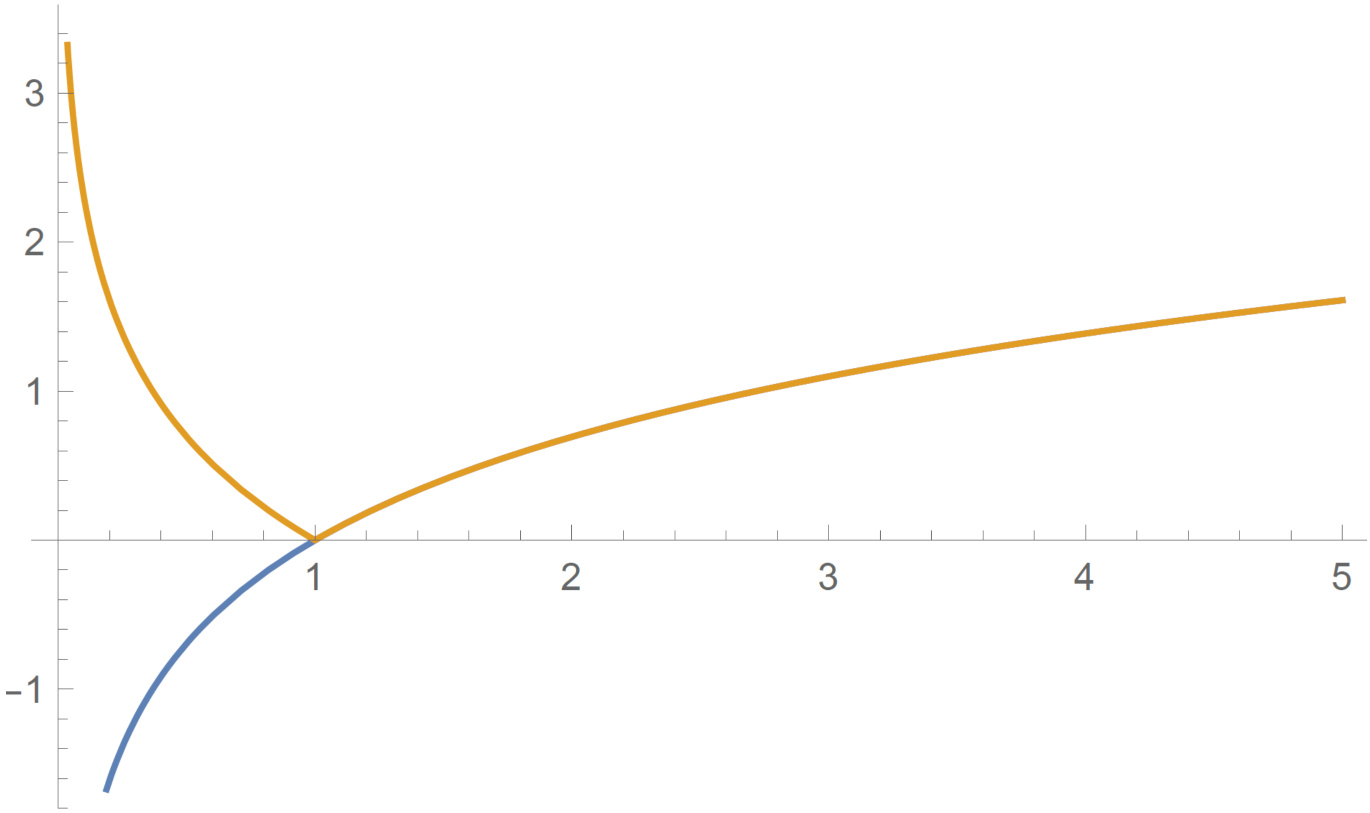


Afbeelding 3. Een opgerolde dimensie. Van dichtbij heeft het oppervlak van het koord twee dimensies; van grote afstand gezien maar één. Afbeelding: Alex Dunkel.

Als versimpeld model gaan wij nu naar een vijfdimensionale ruimtetijd kijken, waarbij de extra dimensie is opgerold als een cirkel. In de vierdimensionale theorie blijkt dat we de straal van de cirkel r kunnen interpreteren als een veld: net als bijvoorbeeld temperatuur kan de grootte van de cirkel immers van de plaats in de overige vier dimensies afhangen. De veldenruimte begint bij $r=0$, waar de cirkel samenknijpt tot een punt, en loopt daarna oneindig ver door. Net zoals het temperatuurveld vinden we als veldenruimte dus een lijn met één uiteinde. In de snaartheorie is er nu een natuurlijke manier om afstanden te berekenen binnen deze veldenruimtes, en voor de straal van de cirkel wordt deze afstand gegeven door

$$d(r,r_0) = | \log [r/r_0] | ,$$

waarbij r_0 een beginpunt is en r het eindpunt waarheen we de ‘afstand’ $d(r,r_0)$ willen uitrekenen. Als we het beginpunt nu voor het gemak vastzetten, zeg $r_0 =1$, dan zien we uit de eigenschappen van de logaritmische functie (zie de afbeelding hieronder) dat er twee punten zijn waarvoor deze afstand in de veldenruimte oneindig groot wordt. Voor $r_0 \to \infty$ zien we dat $\log [r] \to \infty$, en ook voor $r_0 \to 0$ zien we dat óók $|\log [r]| \to \infty$.



Afbeelding 4. De logaritmische functie. De gladde lijn die van blauw naar oranje gaat is de log-functie zelf. De oranje lijn links geeft de grootte (absolute waarde) van de logfunctie aan. Zowel voor heel grote als heel kleine r wordt log(r) oneindig groot.

Laten we om te beginnen eens beter kijken naar het geval $r \to \infty$. Stel dat we een deeltje hebben in ons vijfdimensionale model. Dan wordt de energie van dit deeltje gegeven door de vergelijking van Einstein als

$$E = \sqrt{m^2 c^4+p^2 c^2} ,$$

waarbij c de lichtsnelheid is, m de massa en p de impuls van het deeltje. (Die impuls volgt in de klassieke mechanica uit $p = m v$), met v de snelheid van het deeltje.) Als we aannemen dat het deeltje stilstaat, oftewel $p =0$, dan zien we de vergelijking van Einstein in de vertrouwde vorm terug:

$$E_{\text{rust}} = mc^2 .$$

Maar wat nu als we naar een massaloos deeltje kijken dat stilstaat in onze vierdimensionale ruimtetijd, maar wel beweegt in de vijfde richting? Dan vinden we opmerkelijk genoeg dat vanuit vier dimensies gezien

$$E_{\text{rust}} = p_5 c ,$$

met p_5 de impuls van het deeltje in de vijfde richting. Oftewel, vanuit vier dimensies gezien heeft dit ‘massaloze’ deeltje wél een rustmassa, namelijk

$$m_4 = p_5 /c .$$

Om de massa van dit deeltje nog iets preciezer te beschrijven, moeten we kijken naar de golffunctie van ons deeltje. We willen namelijk dat na een volledig rondje over de cirkel, $x_5 \to x_5+2\pi R$, we weer bij dezelfde waarde aankomen voor de golffunctie ψ, dus $\psi(x_5) = \psi(x_5+2\pi R)$. Met andere woorden, de golffunctie moet een *periodieke* functie van de coordinaat x_5 op de cirkel zijn. In termen van de impuls p_5 blijkt dit zich te vertalen in de eis dat $p_5 = n /r$, met n een geheel getal. Dit betekent dat we een hele toren aan deeltjes krijgen met als massa’s

$$m_4 = \frac{n}{c r} .$$

En wanneer we nu de straal van de cirkel dan heel groot maken, $r \to \infty$, zien we inderdaad dat de massa van deze deeltjes steeds kleiner wordt en uiteindelijk naar nul gaat. Deze toren van deeltjes, eentje voor elke waarde van n, staat ook wel bekend als de *Kaluza-Kleintoren*, naar de pioniers die het oprollen van extra dimensies als eerste uitwerkten. Ooguri en Vafa gebruikten precies deze Kaluza-Kleintoren om hun afstandsvermoeden te motiveren.

Van grote naar kleine cirkels

Maar wat gebeurt er nu voor $r \to 0$? De deeltjes die we zojuist vonden worden dan heel erg zwaar, dus zij vormen niet de deeltjes van het afstandsvermoeden. Dit is waar de ware aard van snaartheorie naar voren komt. Snaartheorie zit namelijk vol met objecten die niet puntvormig zijn maar uitgestrekt, zoals de snaren zelf, die gewikkeld kunnen worden om de cirkel. De massa van zo’n object is evenredig met zijn grootte: maak je een object groter, dan zal het ook zwaarder worden. Wanneer we de cirkel laten samenknijpen en de straal naar nul sturen, dan zal de massa van een snaar gewikkeld om de cirkel dus ook naar nul gaan. Door vervolgens snaren meerdere malen om de cirkel te wikkelen, creëren we precies een toren van deeltjes die wél voldoet aan het afstandsvermoeden.

De twee torens die ik in dit artikel heb beschreven lijken misschien heel anders van aard, maar ze blijken twee verschillende beschrijvingen van dezelfde deeltjes te geven. Binnen de snaartheorie kennen we namelijk de zogenaamde T-dualiteit, die ons vertelt dat één natuurkundig model met een kleine cirkel in de ruimtetijd altijd 'duaal' is aan (dezelfde fysica beschrijft als) een ander model met juist een grote cirkel. Om deze dualiteit precies te maken, worden de deeltjes in de Kaluza-Kleintoren van de grote cirkel geïdentificeerd met de windingen van een snaar om de kleine cirkel. Het aantal windingen in het ene model komt hierbij precies overeen met het getal n dat de impuls beschrijft in het andere.

Kortom, snaartheorie geeft ons een interessante speeltuin om natuurkundige modellen te testen die quantummechanica en zwaartekracht proberen te verenigen. Door 'wandelingen te maken' in de veldenruimte van deze modellen komen we bijzondere punten tegen, waar oneindige torens van deeltjes massaloos worden. Op het eerste oog leken de torens die we vonden totaal niet op elkaar, maar door middel van dualiteiten lijkt er toch een hint te zijn van een overkoepelend principe. Of het afstandsvermoeden daadwerkelijk klopt, daarover zijn theoretisch natuurkundigen het nog niet helemaal over eens, maar de ontdekking dat veel modellen deze eigenschap delen lijkt een goede stap te zijn in de richting van het ontrafelen van de eigenschappen die elke theorie van quantumzwaartekracht moet hebben.