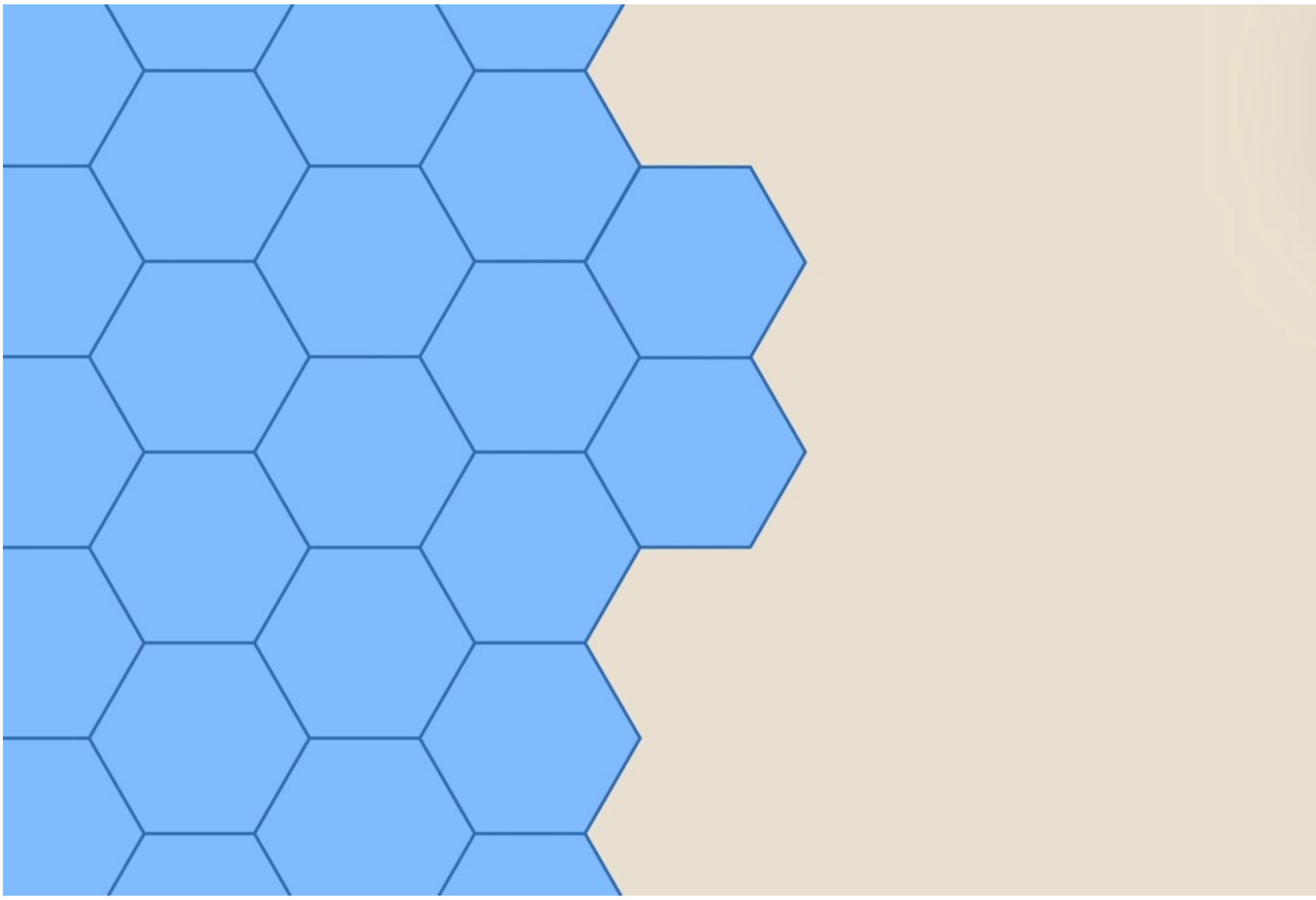
Oneindige patronen

Wanneer je een sinus met je rekenmachine plot of met de hand tekent, heeft deze een bepaalde golflengte. Deze sinus kun je vervolgens meerdere keren kopiëren en achter zichzelf plaatsen, waardoor je een langer patroon of signaal krijgt wat er hetzelfde uit blijft zien: die ene golflengte van de sinus herhaalt zichzelf steeds. Je kunt dan zeggen dat het patroon *periodiek* is. Er zijn nog veel meer voorbeelden van periodieke patronen: denk bijvoorbeeld aan een schaakbord. Het basispatroon is daar een raster van 2 bij 2, zwarte en witte vierkanten, dat je meerdere keren aan zichzelf vastplakt. Voor zowel een sinus als een schaakbordpatroon kun je dit zelfs oneindig vaak doen, zodat het patroon zich blijft herhalen.

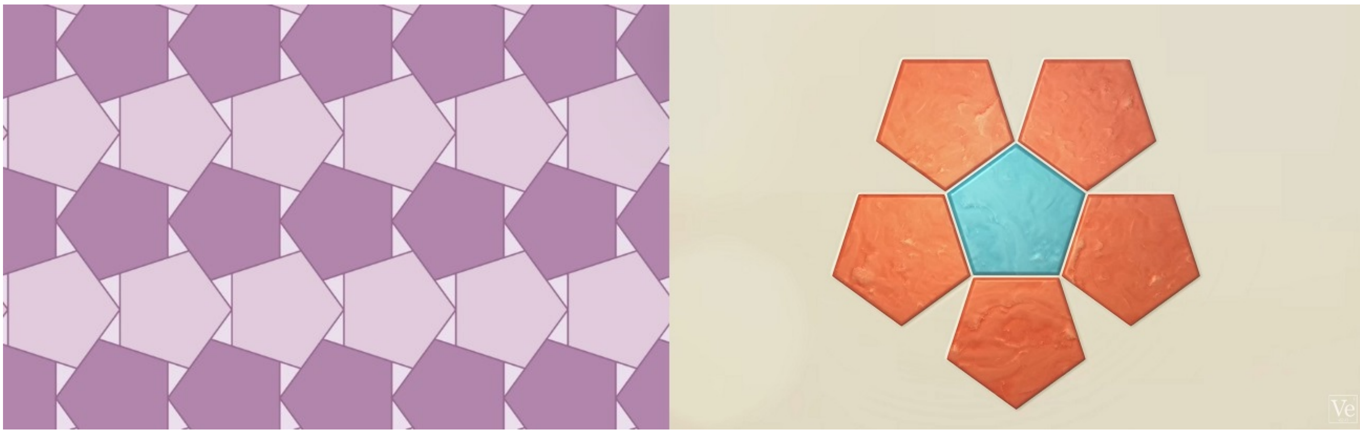
Je zou de vraag ook andersom kunnen stellen: ‘hoeveel verschillende vormen heb ik nodig om een patroon te maken dat zichzelf *nooit* herhaalt? Daarmee bedoel ik niet dat je ervoor *kiest* om het patroon niet-herhalend te maken – dat kan met witte en zwarte schaakbordvierkantjes ook – maar dat de basisvormen wél aan elkaar gelegd kunnen worden, maar *nooit* een herhalend patroon zullen vormen. Zo’n patroon zou je dan tot in het oneindige kunnen doorleggen, zonder dat het dus ooit periodiek wordt. Precies die vraag stelde Roger Penrose zichzelf, en het antwoord zal je misschien verbazen!



Afbeelding 1. Six-fold symmetry. Getegeld patroon van zeshoeken. Beeld uit de Veritassium-video aan het eind van dit artikel.

Voor we bij dat antwoord uitkomen, is het goed om even iets dieper in te gaan op die periodiciteit en daarmee ook op *symmetrieën*. Het schaakbordpatroon kun je ‘gewoon’ naast zichzelf leggen, en er ontstaat een symmetrie. Soortgelijke symmetrieën kunnen ook ontstaan uit rotaties: denk bijvoorbeeld aan het patroon dat ontstaat wanneer je een vloer zou willen leggen met alleen maar tegels met de vorm van een gelijkzijdige driehoek. Als je meerdere driehoeken hebt kun je deze tegen elkaar aan leggen en zo een patroon maken, door de eerste driehoek in gedachten om een van zijn hoekpunten te draaien tot hij op een nieuwe plek uitkomt die aansluit op de vorige, en dan op die plek een nieuwe driehoek neer te leggen. Dit kun je voor 3 verschillende hoekpunten doen, waarbij je 60 graden moet draaien – dit noemen we ‘three-fold symmetry’. Met een vierkant kun je hetzelfde uithalen, waarbij je om 4 verschillende hoekpunten in een hoek van 90 graden kunt roteren en vervolgens een patroon zou kunnen leggen, de zogenaamde ‘four-fold symmetry’. Zo kun je nog iets verder gaan: denk aan hoe je met het 120 graden roteren van een gelijkzijdige zeshoek weer zo’n zeshoek krijgt. Het patroon dat zo ontstaat heeft een ‘six-fold symmetry’.

Dit soort symmetrieën komt voor in de kristallografie, waarbij als het ware een ‘driedimensionaal tegeltjespatroon’ wordt gelegd. Bij de ‘tegeltjespatronen’ van echte kristallen komt nog wel een extra regel kijken: er mag zich geen ruimte bevinden tussen de tegels. Misschien vroeg je je hierboven al af waarom we van drie- en vierhoeken direct naar *zes*hoeken gingen, en niet naar vijfhoeken. Dat wordt nu duidelijk: met deze nieuwe spelregel gaat ‘five-fold symmetry’ van een vijfhoek eigenlijk niet meer op. Wanneer er verschillende vijfhoeken aan elkaar vast worden gemaakt, blijft er altijd ruimte over tussen de vijfhoeken – zie de afbeelding hieronder. Lange tijd dacht men dan ook dat de ‘two-fold’, ‘three-fold’, ‘four-fold’ en ‘six-fold symmetry’ de enige opties waren. Er werd wel met ‘five-fold symmetry’ geëxperimenteerd (zelfs Kepler was er in zijn tijd mee bezig), maar dat kreeg men niet werkend. Iedereen dacht dat kristallen met zulke structuren niet konden bestaan… totdat Roger Penrose ging nadenken over hoe dat tóch zou kunnen – niet met één tegel met een regelmatige vorm, maar met meerdere.



Afbeelding 2. Five-fold symmetry? Tegelpatronen van vijfhoeken, met duidelijk ruimte tussen de figuren. Beelden uit de Veritassium-video aan het eind van dit artikel.

Het uiteindelijke antwoord op de vraag ‘Hoeveel tegeltjes heb ik ten minste nodig om een oneindig patroon te maken?’, welke toepassing dat vervolgens had, en wat dat te maken heeft met de vraag naar nooit-herhalende patronen waarmee we begonnen, kun je in onderstaande video van het Youtubekanaal Veritasium bekijken: