

Hydrodynamica (3): Het getal van Reynolds

In onze serie over hydrodynamica zijn de Navier-Stokesvergelijkingen al diverse malen ter sprake gekomen. Deze vergelijkingen beschrijven voor veel vloeistoffen hoe ze stromen. Jammer genoeg zijn de Navier-Stokesvergelijkingen heel moeilijk om op te lossen. Sterker nog: als je wiskundig kunt bewijzen dat oplossingen bestaan (of juist niet), dan [maakt het Amerikaanse Clay-instituut je één miljoen dollar rijker](#). Toch kwamen we in deze serie in het [artikel over viscositeit](#) al een oplossing tegen, toen we bespraken waarom wolken zweven. Waarom kon in dat geval wel een oplossing worden gevonden?



Afbeelding 1. Water onderaan een waterval. Turbulente stromingen waarin bijvoorbeeld ‘golven breken’ zijn enorm lastig wiskundig te beschrijven. Maar hoe bepaal je om te beginnen of een stroming turbulent zal zijn?

Foto: [Pixabay, 70154](#) (CC0).

De volledige Navier-Stokesvergelijkingen bestaan uit de Eulervergelijking samen met de massabehoudvergelijking, allebei besproken in het [eerste artikel uit deze serie](#), uitgebreid met de beschrijving van viscositeit of ‘stroperigheid’ dat we in het [tweede artikel](#) bespraken. Osborne Reynolds, een Ierse wetenschapper aan het eind van de 19^e eeuw, ontdekte dat er twee typen oplossingen van de Navier-Stokesvergelijking bestaan: zogeheten *laminaire* en *turbulente* stromen.

Voor het turbulente geval is het vinden van exacte oplossingen vruchteloos gebleken, en zelfs computers hebben veel problemen om chocola te maken van deze situatie. Het probleem is dat deze oplossingen [chaotisch](#) zijn, iets wat het rekenwerk erg lastig maakt. In het geval van laminaire, niet-chaotische stromen blijkt echter een vereenvoudiging van de Navier-Stokesvergelijking plaats te vinden! Voor laminaire stromen blijken we afscheid te mogen nemen van meneer Navier en kunnen we ons storten op de eenvoudigere Stokesvergelijking. Dit is wat er ook gebeurde in het [artikel over viscositeit](#), toen we uit konden rekenen waarom wolken konden bestaan.

Maar wanneer is een stroming nu turbulent, en wanneer chaotisch? Reynolds definieerde, overigens in navolging van Stokes zelf, een getal dat nu het Reynoldsgetal heet en als Re genoteerd wordt, en dat de scheiding tussen laminair en turbulent karakteriseert. Het getal kun je als volgt uitrekenen:

$$Re = \rho v L / \eta$$

In deze formule staat ρ voor de dichtheid van de vloeistof en η voor de viscositeit. Verder is L de typische grootte van het systeem (bijvoorbeeld de doorsnede van de buis waardoor de vloeistof stroomt, of de doorsnede van de bol waaromheen de vloeistof stroomt) en v de typische snelheid waarmee de vloeistof stroomt.

Het Reynoldsgetal is zo gedefinieerd dat het antwoord niet afhangt van de eenheden waarin je de verschillende grootheden meet: het eindresultaat is een puur numerieke waarde. Wanneer dit getal klein is, dan is de stroom laminair. Wanneer Re groot is, dan is het systeem

turbulent. Het is van tevoren onduidelijk waar precies de overgang van 'klein' naar 'groot' plaatsvindt, en dit hangt ook af van de precieze situatie die we willen beschrijven. Bij stromingen in buizen is 'klein' bijvoorbeeld $Re < 2300$ en 'groot' correspondeert daar met 3500 of meer. Voor een kleine waarde van Re mogen we meneer Navier dus uit de Navier-Stokes vergelijking knikkeren!

Welke eigenschappen moet een systeem hebben om een klein Reynoldsgetal te hebben? Uit de formule zien we dat daar verschillende mogelijkheden voor zijn. Bij het voorbeeld met de druppels in de wolken was de typische grootte van het systeem, L , heel klein, wat resulteerde in een kleine waarde van Re . Nu kun je bijvoorbeeld ook een kleine waarde van Re krijgen door ontzettend stroperige systemen te beschouwen: wanneer η heel groot is, is Re immer ook heel klein! Een heel hoge viscositeit heet *overdamping*.

Een voorbeeld van een overgedempt systeem zie je in het filmpje hieronder:

Normaal zou je verwachten dat de kleuren in het filmpje zouden mengen bij het draaien aan de haspel. Deze intuïtie stamt uit onze ervaring met wat er gebeurt in vloeistoffen die aan de algemene Navier-Stokesvergelijkingen voldoen, zoals limonade. De les uit dit artikel: aangezien een overgedempt systeem voldoet aan de dynamica van de Stokesvergelijkingen, gebeuren er hele andere dingen!