Hoelang duurt een val door de aarde?

In het beroemde boek 'Reis naar het middelpunt van de aarde' schrijft Jules Verne over een fictieve ontdekkingstocht naar het punt midden in de aarde. Stel je voor dat we daadwerkelijk een tunnel zouden hebben die dwars door de aarde gaat, en aan de andere kant bij het oppervlak uitkomt. Hoelang duurt het dan om de andere kant te bereiken?

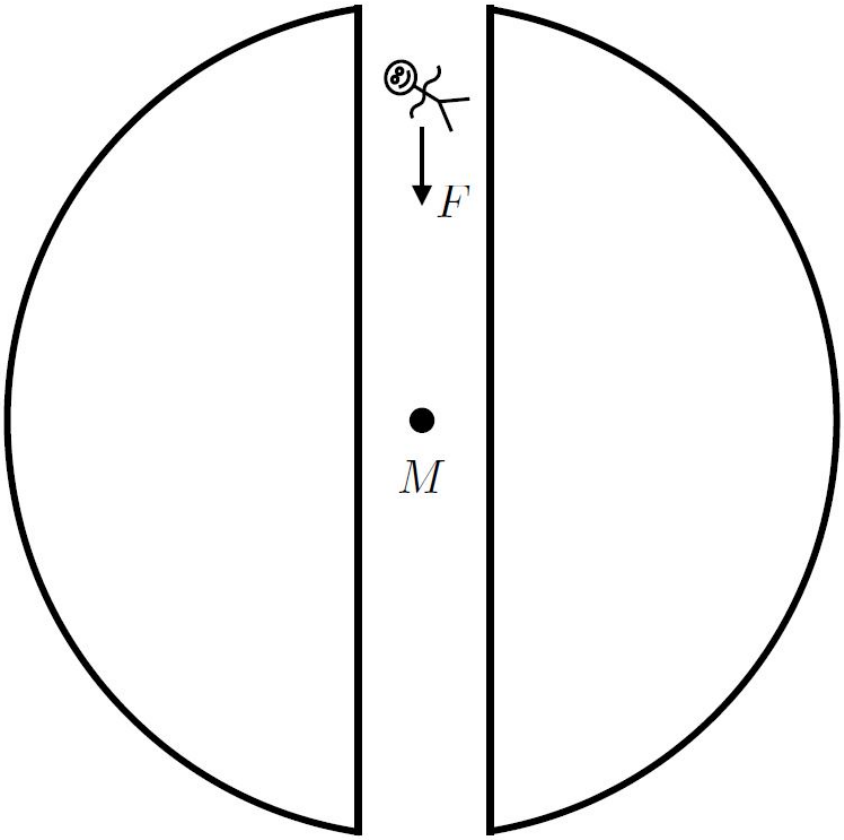
Afbeelding 1. Een schilderij van een Mosasaurus en Ichtyosaurus. In 'Reis naar het middelpunt van de aarde' beschrijft Jules Verne een prehistorische wereld die zich onder het aardoppervlak bevindt. De reizigers komen op hun weg tal van prehistorische wezens tegen,

waaronder een Ichtyosaurus. Via Picryl.com.

We kunnen de bovenstaande vraag beantwoorden met behulp van een gedachte-experiment. Om de berekening simpel te houden doen we een aantal aannames. Zo nemen we aan dat de aarde perfect rond is, en overal dezelfde dichtheid heeft. Daarnaast veronderstellen we dat in de tunnel, die bijvoorbeeld van de Noord- naar de Zuidpool loopt, de luchtwrijving te verwaarlozen is. Nu spring je aan een van beide kanten – zeg de Noordpool – de tunnel in, en laat je naar beneden vallen. Bereik je op deze manier überhaupt de andere kant? En zo ja, hoelang duurt de val dan? Om hier een uitspraak over te kunnen doen hebben we de zwaartekrachtswet van Newton nodig:

\(F = – G \frac{m M}{r^2} \).

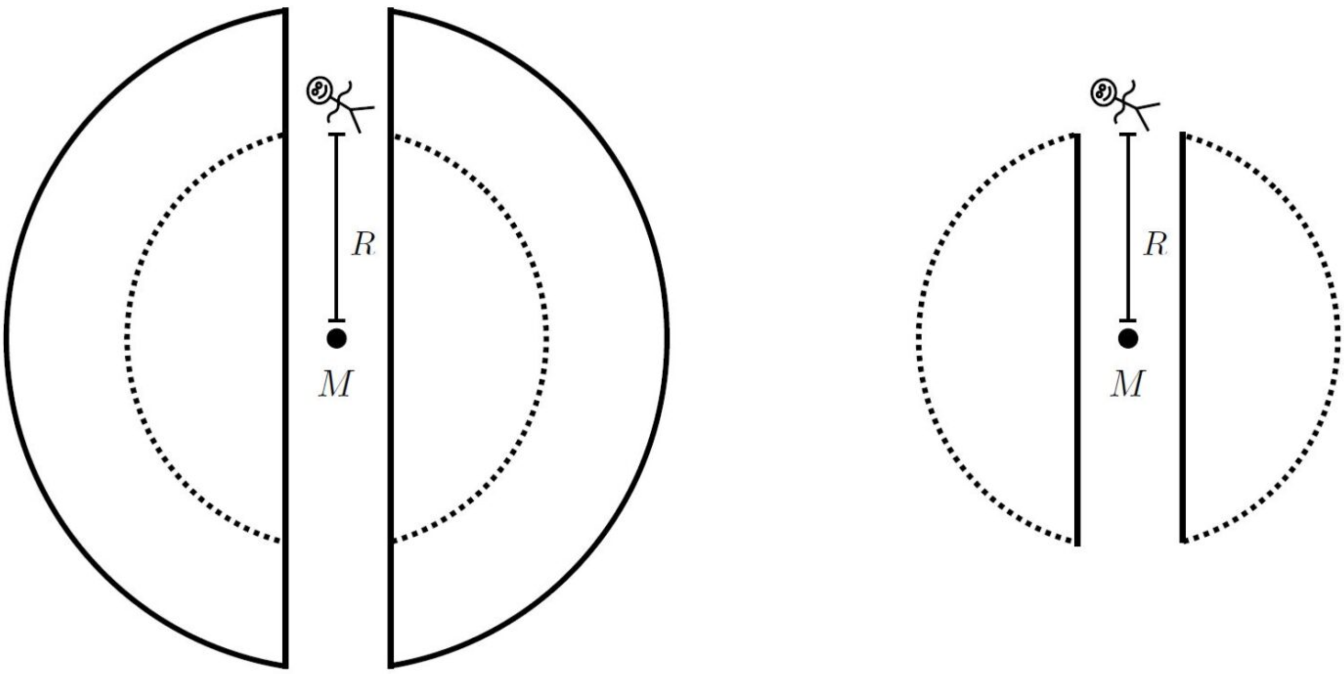
Deze formule beschrijft de onderlinge zwaartekracht tussen twee objecten, en zegt dat de aantrekkingskracht evenredig is met het product van de massa's \(m \) en \(M \) en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand \(r \) tussen beide objecten.



Afbeelding 2. Een val door de aarde. Bij een val door de aarde trekt de zwaartekracht van de aarde je naar het

middelpunt. We kunnen net doen alsof alle massa M zich in
het middelpunt bevindt.

We hebben nu de zwaartekracht nodig tussen een bolvormig object – de aarde in dit geval – en de vallende waarnemer. Het is in zo'n situatie handig om de volgende regel te gebruiken: bij het berekenen van de aantrekkingskracht van een bol kun je, zolang de massa maar netjes symmetrisch in de bol verdeeld is, ook net doen alsof alle massa van de bol in het middelpunt zit. Het stuk van de bol dat dichter bij de waarnemer zit trek in feite harder, en het stuk dat verder weg zit minder hard, maar als je alle bijdragen netjes meerekent zul je vinden dat het geheel uitmiddelt: wat de aantrekkingskracht op waarnemer betreft lijkt het net alsof alle massa in het middelpunt zit. Dit feit gebruik je bijvoorbeeld ook wanneer je de baan van een planeet rond de zon uitrekent: hier gaat het om de zwaartekracht tussen twee grote (bij goede benadering) bolvormige objecten. Eenzelfde soort berekening laat zien dat zodra een waarnemer zich in de binnenkant van een *bolschil* bevindt, de aantrekkingskracht van alle kanten elkaar opheft: binnenin een bolschil ervaar je geen zwaartekracht van de bolschil.



Afbeelding 3. Op weg naar het middelpunt. Om de zwaartekracht op de vallende waarnemer uit te rekenen, hoeven we alleen de massa van de bol mee te nemen met een straal die even groot is als de afstand van de waarnemer tot het centrum. Het oppervlak van deze bol is aangegeven met een stippellijn (links). Voor de berekening kunnen we de massa

in de bolschil daarbuiten dus vergeten (rechts).

De laatste opmerking heeft het volgende effect: zodra de waarnemer tijdens de val een bepaalde diepte heeft bereikt, hoef je alle massa die verder van het centrum zit dan de waarnemer niet mee te rekenen als je de zwaartekracht berekent. Daarom wordt de zwaartekracht effectief bepaald door die van een kleinere bol met een straal die even groot is als de afstand van de waarnemer tot het centrum – zie afbeelding 3. Omdat we aannemen dat de dichtheid van de aarde constant is, is deze massa evenredig met het volume van de bol, en wordt die massa M op een afstand R dus gegeven door

$$M = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

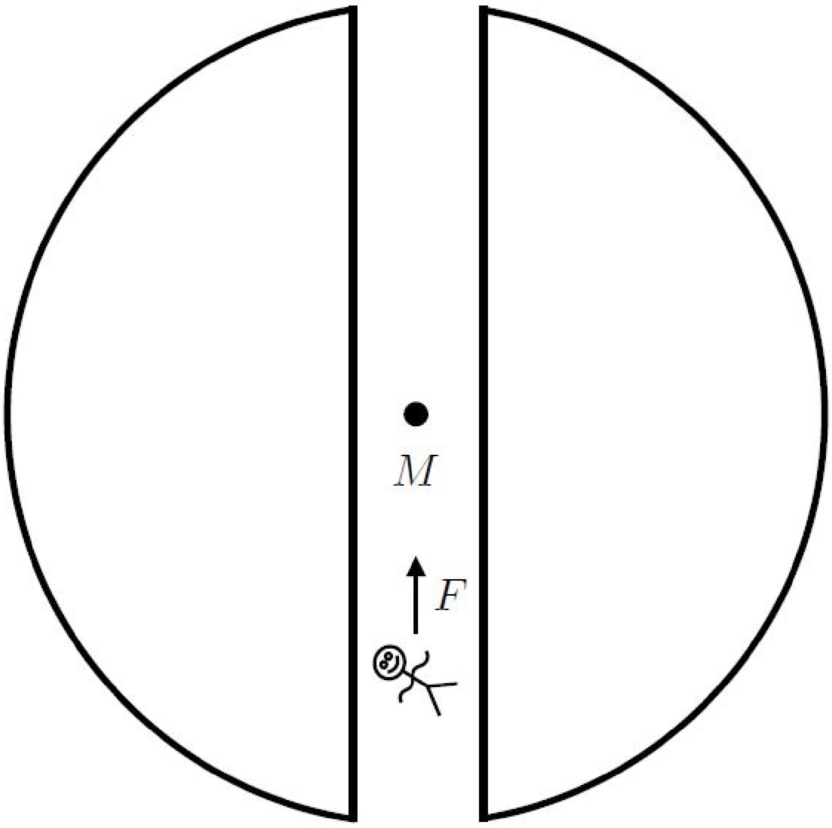
Als we deze massa invullen in de zwaartekrachtswet vinden we de formule

$$F = – G m \rho \frac{4}{3} \pi R.$$

Zonder dat we de beweging expliciet uitrekenen, kunnen we nu al iets zeggen over het kwalitatieve gedrag van de val. Merk op dat de kracht op een afstand R van het middelpunt *evenredig* is met R. Deze afhankelijkheid komt je wellicht bekend voor: de kracht heeft eenzelfde vorm als bij het gecombineerde systeem van een massa die aan een veer hangt – een massa-veersysteem – en de krachtsformule staat in dat geval bekend als de *wet van Hooke*. De evenredigheidscontante tussen de kracht en de afstand wordt in dat geval de veerconstante k genoemd:

$$F = – k R.$$

Als je de twee formules vergelijkt zie je dat voor de val door de aarde de veerconstante k dus gelijk is aan $G m \rho \frac{4}{3} \pi$. Uit deze vorm van de krachtsformule kunnen we direct afleiden dat de kwalitatieve eigenschappen van de beweging overeenkomen met die van het massa-veersysteem: een trilling. De valbeweging ziet er dus grofweg als volgt uit: op weg naar het middelpunt zul je in eerste instantie versnellen door de zwaartekracht, maar deze versnelling wordt kleiner zodra je dichter bij het middelpunt komt. Zodra je langs het middelpunt bent gevallen, keert de richting van de kracht om en zorgt deze ervoor dat je wordt vertraagd. Zodra je de andere kant van het aardoppervlak hebt bereikt sta je stil, en herhaalt dezelfde beweging zich in omgekeerde richting.



Afbeelding 4. Heen en weer. Als je voorbij het middelpunt bent gevallen keert de richting van de zwaartekracht om. De waarnemer valt eerst nog steeds naar de Zuidpool, maar steeds minder snel, en keert uiteindelijk bij het oppervlak om. Dit zorgt er uiteindelijk voor dat de beweging een trilling wordt.

We kunnen deze analogie met het massa-veersysteem gebruiken om de valtijd te bereken. Er bestaat namelijk een simpele formule voor de trillingstijd van zo'n oscillatie in termen van de massa van het voorwerp en de veerconstante. De trillingstijd is de tijd die nodig is om na een oscillatie weer op dezelfde plek terug te komen; als we deze tijd door twee delen vinden we dus de valtijd om de andere kant te bereiken. De formule voor die halve trillingstijd is:

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Vullen we de constante k uit onze valbeweging in, dan vinden we – na wat algebraïsche manipulaties – de volgende uitdrukking voor de valtijd:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{4 G \rho}}.$$

Door een geschikte waarde voor de dichtheid in te vullen komen we uit op het volgende antwoord: de tijd om door de aarde te vallen en de andere kant te bereiken is zo’n 42 minuten. Terzijde: de bovenstaande formule hangt niet af van de variabele R, en de valtijd is dus verrassend genoeg hetzelfde ongeacht de grootte van de bol.

Conclusie: een reis naar het middelpunt van de aarde duurt als je jezelf simpelweg laat vallen zo’n 21 minuten, en bij gebrek aan luchtwrijving blijf je vervolgens heen en weer oscilleren tussen beide polen. In ons gedachte-experiment zaten natuurlijk een aantal versimpelingen; de werkelijke valtijd zal daardoor iets anders zijn. Zo is de aarde geen perfecte bol, en is de binnenkant verre van homogeen: de dichtheid hangt af van de afstand tot het centrum. De berekening die we hierboven hebben geschetst vereist daarom een aantal aanpassingen. In het onderstaande filmpje van het YouTubekanaal Minutephysics wordt het probleem van de val door de aarde nogmaals uitgelegd – en worden enkele van deze correcties besproken: