Hoe kam je een kat?

Wiskundigen zijn vaak met heel abstracte dingen bezig, maar dat weerhoudt ze er niet van om de resultaten luchtig te verpakken – met soms wel erg opmerkelijke namen tot gevolg. Vandaag bespreek ik een stelling over het kammen van een kat: de harige-balstelling!

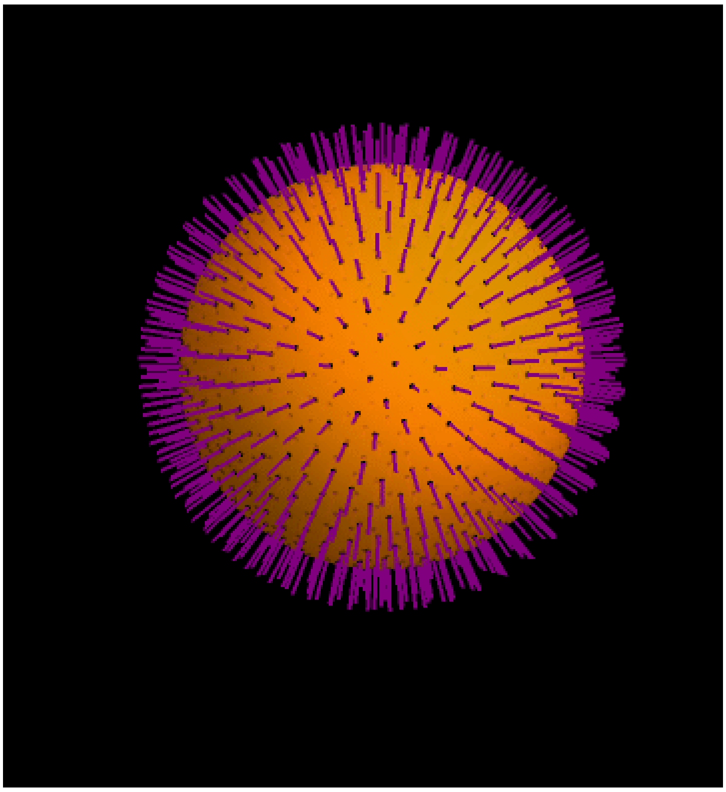
Afbeelding 1, Hoe kam je een kat? Leia, de kat van de auteur.

Kattenliefhebbers weten het maar al te goed: het is belangrijk om je kat zo nu en dan te kammen. Maar kun je een kat zo kammen dat alle haren in dezelfde richting staan? Als we ons de kat voor het gemak voorstellen als een bol die volledig is bedekt met haar, dan is het antwoord ‘nee’: er is altijd ergens een kruin: een plukje waar haren uit verschillende richtingen elkaar tegenkomen. Deze pluizige opmerking blijkt – al zou je dat niet direct verwachten – gerelateerd te zijn aan een diepe stelling uit de wiskunde.

De wiskunde van vormen

De harige-balstelling is een resultaat uit de *algebraïsche topologie* – een deelgebied van de wiskunde dat gaat over vormen. Henri Poincaré, een van de grondleggers van de topologie, formuleerde deze stelling aan het einde van de negentiende eeuw, toen het vakgebied nog relatief nieuw was. Voor de nieuwsgierige lezers: in een eerder artikel besprak ik al uitgebreider wat het begrip `*topologie'* precies inhoudt, en waarom het ook in de theoretische natuurkunde een belangrijke rol speelt.

In gewone-mensentaal zegt de harige-balstelling dat het niet mogelijk is om een behaarde bal zo te kammen dat alle haren in dezelfde richting staan: er moet ergens een kruin ontstaan. De wiskundige formulering klinkt een stuk ingewikkelder: die zegt namelijk dat ‘ieder continu raakvectorveld op een boloppervlak een nulpunt moet hebben’. De *raakvectoren* zijn hier de haren – ze hebben een grootte en een richting – en een nulpunt komt overeen met een raakvector van lengte nul, ofwel een kruin. Dat het hier om een *continu* vectorveld gaat betekent dat naastgelegen haren ongeveer in dezelfde richting wijzen. Het bewijs voor de stelling – en de generalisatie naar boloppervlakken in meer[1] dimensies – werd in 1912 door de Nederlandse wiskundige Luitzen Egbertus Jan Brouwer gegeven. Omdat het bewijs[2] alleen de topologie van de bol gebruikt, geldt het resultaat voor elke vorm die je zonder te knippen kan omvormen tot een bol – dus ook een ‘bol’ met pootjes en een staart. Voor vormen die hier niet aan voldoen geldt de stelling niet per se: zo is het bijvoorbeeld wel mogelijk om een behaarde donut plat te kammen!



Afbeelding 2. De harige-balstelling. Is het mogelijk om alle haren in dezelfde richting te kammen? Het antwoord is `nee': wat je ook probeert, er is altijd een plek op de bal (in de animatie aangegeven met een rode stip) waar het misgaat. Animatie: Jacopo Bertolotti.

In het oog van de storm

Een leuke toepassing van de harige-balstelling is: je kunt ermee aantonen dat er altijd een plaats op aarde is waar het niet waait. We zijn gewend om de windrichting en -sterkte op een kaart weer te geven met een pijltje – in wiskundetaal ook wel *vector* genoemd – waarbij de lengte van het pijltje aangeeft hoe groot te windsnelheid is. Normaal gesproken bekijken we alleen een klein stuk van de aarde – dat dan plat wordt weergeven op een kaart – maar als we ons de wind voorstellen op de aardbol als geheel, zegt de stelling van de harige bal dat er ergens een plek moet zijn waar het pijltje lengte nul heeft, oftewel waar het windstil is. Dit verschijnsel kennen we ook uit de praktijk. Bij een orkaan – hoe groot deze ook is – is er altijd een punt waar het niet waait: `het oog van de storm.' Dit welbekende verschijnsel heeft dus meer met wiskunde te maken dan je misschien in eerste instantie zou verwachten.

Afbeelding 3. Een orkaan. De harige-balstelling in de praktijk: waar is het windstil? Foto van orkaan Isabel gemaakt vanuit het ruimtestation ISS. Afbeelding: NASA.

Behoefte aan een visuele samenvatting? In het onderstaande filmpje van het YouTube kanaal minutephysics wordt de harige-balstelling nogmaals beknopt uitgelegd.

---

[1] Verassend genoeg is de stelling alleen waar voor sferen – een ander woord voor boloppervlakken – in *even* dimensies, dus voor de 2-sfeer, 4-sfeer, etc.

[2] Grof gezegd wordt in het bewijs de totale *index* van alle nulpunten van het vectorveld gerelateerd aan de *Eulerkarakteristiek* van het oppervlak, een voorbeeld van een *topologische invariant*. Voor de bol is dit getal gelijk aan 2 – wat aangeeft dat er tenminste één nulpunt moet zijn – terwijl het donutoppervlak bijvoorbeeld Eulerkarakteristiek 0 heeft, waardoor een vectorveld zonder nulpunten wel mogelijk is.