Hoe betegel je een badkamer?

Het betegelen van een badkamer is een aardig werkje, maar als je vierkante tegels gebruikt kan er, op eventueel enkele gebroken tegels na, niet zoveel misgaan. Misschien is het mede daarom dat de meeste badkamers die je ziet betegeld zijn met vierkante of rechthoekige tegels. Zulke tegels vormen namelijk een simpel, zichzelf herhalend patroon dat de hele muur bedekt. Er zijn echter (wiskundig) meer interessante manieren om badkamers te tegelen! In dit artikel bespreek ik die.

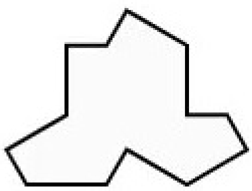
Hoe betegel je een badkamer? Met rechthoekige tegels valt dat wel mee, maar zijn er ook interessantere tegelvormen? Foto via [Pxfuel](https://www.pxfuel.com).

In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in *aperiodieke* betegelingen. Zulke betegelingen voldoen aan twee eisen. Ten eerste moeten ze de hele muur bedekken; er mogen geen gaten ontstaan en de tegels passen volledig naast elkaar. Ten tweede zoeken we naar patronen die zichzelf niet herhalen: er is geen deel van de muur dat we kunnen copy/pasten om de muur te betegelen. Met andere woorden: naar welk deel van de muur we ook kijken, precies dezelfde betegeling op dat gedeelte komt nergens anders op de muur voor. Ten slotte zijn we geïnteresseerd in betegelingen van oneindig grote muren: we zoeken naar betegelingen waar het feit dat die aperiodiek is niet afhangt van de grootte van de muur.

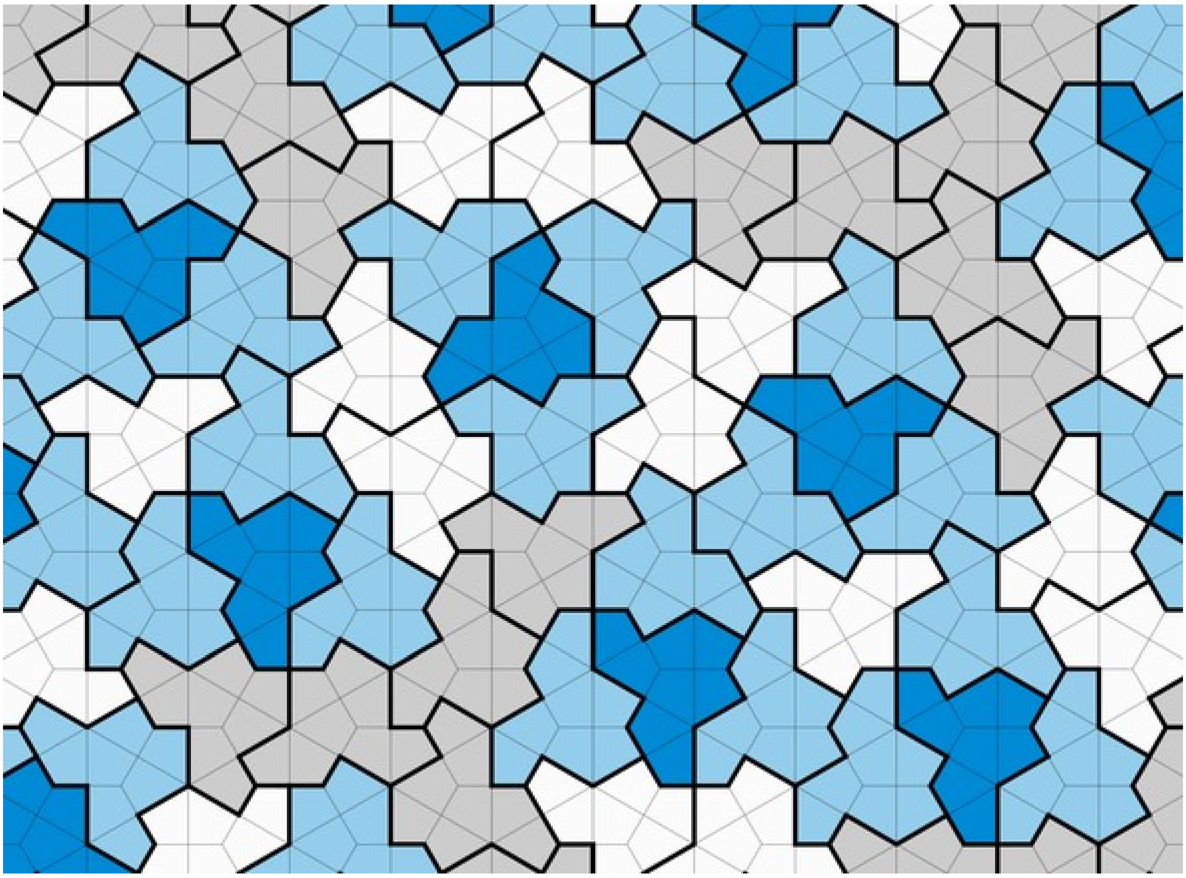
De vraag die we nu willen stellen is hoeveel verschillende basistegels je minimaal nodig hebt, zodat iedere betegeling met die tegels aperiodiek is. In een recent artikel werd deze vraag ook al besproken, met als antwoord twee. Dat antwoord was niet het eerste dat gevonden werd: in minder dan 15 jaar ging het antwoord van 20.426 verschillende basistegels, naar slechts twee – het antwoord dat nobelprijswinnaar Roger Penrose vond in de jaren 70. De natuurlijke vraag wordt dan: kan dat nog beter? Is er een unieke tegelvorm zodat je met die ene vorm alleen aperiodieke betegelingen van een oneindige muur kunt maken?

Einstein-betegelingen

Zo'n unieke aperiodieke betegeling, gemaakt met tegels van slechts één vorm, wordt ook wel een einstein-betegeling genoemd. (De naam is ongerelateerd aan de wereldberoemde natuurkundige Albert Einstein, maar komt van de Duitse vertaling van 'één steen'). Na jaren zoeken volgend op het werk van Penrose hadden veel wiskundigen de zoektocht naar einstein-betegelingen opgegeven. Dat wil zeggen: totdat afgelopen herfst gepensioneerd technicus David Smith met een voorstel kwam (link). De voorgestelde 'einstein' heeft 13 zijdes en heeft iets weg van een hoed of t-shirt, afhankelijk van hoe je ernaar kijkt:



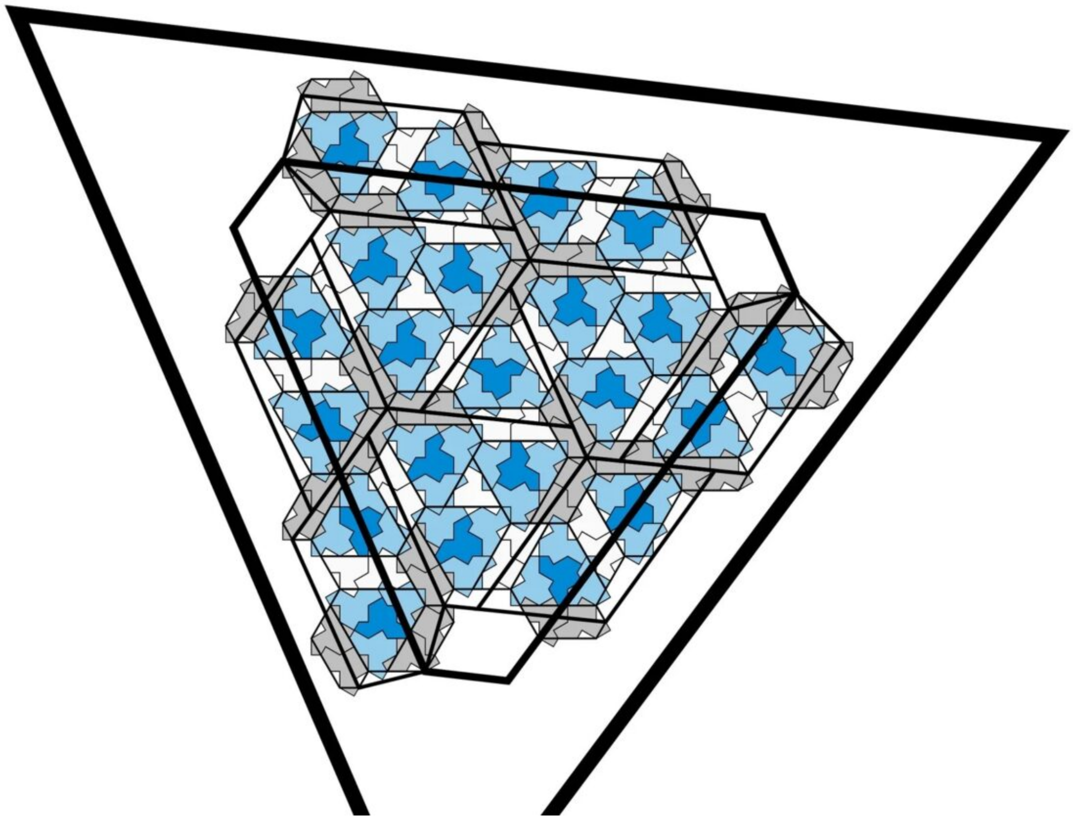
Smith kwam op deze vorm door te spelen met computersoftware, PolyForm Puzzle Solver, waarmee je betegelingen kan maken. Vervolgens knipte hij er een stel uit om uit te vogelen of de resulterende betegeling periodiek is. Met het aantal tegels dat Smith gemaakt had, was er geen periodiciteit te vinden – zie de onderstaande afbeelding. Het leek er dus op dat Smith inderdaad een einstein had gevonden.



Dat is echter te vroeg gejuicht. Het kan immers zo zijn dat er meer tegels nodig zijn om de periodiciteit te vinden. Het aantal tegels dat je in de badkamer kan leggen, heeft helaas een bovengrens, en dus nam Smith contact op met een aantal wiskundigen die vervolgens op zoek gingen naar een bewijs dat deze betegeling inderdaad een stukje van een echte einstein-betegeling is.

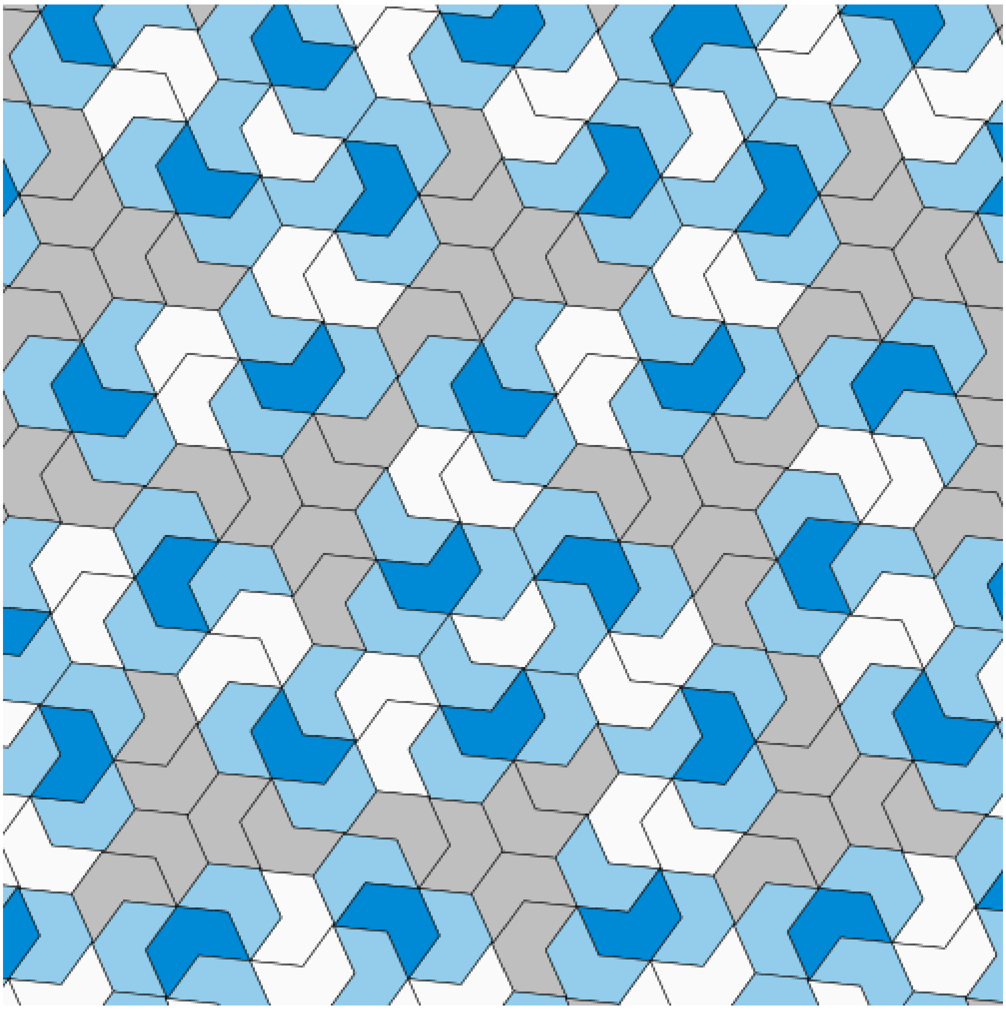
Twee bewijzen

De wiskundigen vonden twee verschillende bewijzen die aantonen dat elke betegeling met de voorgestelde einstein inderdaad aperiodiek is. Het eerste bewijs volgde dezelfde strategie als soortgelijke bewijzen voor de aperiodieke betegelingen met meer verschillende basistegels, zoals die van Penrose. Deze manier van bewijzen komt erop neer dat je laat zien dat het leggen van meer tegels de onderliggende structuur 'groter' maakt. Als je een aantal van de einstein-tegels tegen elkaar legt, kan je een vorm maken die lijkt op een driehoek. Een slecht teken, zou je denken, aangezien driehoeken een *periodieke* betegeling kunnen maken. Als je echter meer tegels toevoegt, vind je geen driehoeken die in elkaar passen, maar grotere en grotere driehoeken die elkaar omvatten.



Het proces dat steeds grotere en grotere driehoeken creëert, kan oneindig worden herhaald. Daarom kan de betegeling niet worden opgedeeld in verschillende stukken die periodiek voorkomen. Dan zou deze overkoepelende structuur namelijk niet mogelijk zijn.

Het tweede bewijs volgt een nieuwe strategie die nog niet eerder is gebruikt om periodiciteit van betegelingen te bestuderen. Het idee is om de op het oog ingewikkelde tegels te relateren aan twee betegelingen met polyiamondvormige tegels – een vorm van tegels die zijn opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken, zoals te zien in onderstaande animatie. Voor deze versimpelde betegelingen is de periodiciteit op een eenvoudigere manier te bestuderen, en dat kan worden gebruikt om te leren over de periodiciteit van de ingewikkeldere betegeling. Wat blijkt: ook met deze strategie kom je tot de conclusie dat de voorgestelde einstein-betegeling inderdaad aperiodiek moet zijn.



De ontdekking van de einstein-betegeling is inmiddels beschreven in een pre-print-artikel en wordt op dit moment door experts bestudeerd voordat het in een wetenschappelijk tijdschrift verschijnt. De auteurs van het artikel hebben ondertussen nóg een einstein-betegeling gevonden die niet alleen aperiodiek is, maar die ook geen spiegelsymmetrieën bevat (link) . Genoeg ideeën dus als je je badkamer op een unieke manier wilt betegelen!

Bronnen

- An aperiodic monotile, David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, en Chaim Goodman-Strauss (https://arxiv.org/abs/2303.10798)
- Newfound Mathematical ‘Einstein’ Shape Creates a Never-Repeating Pattern, Manon Bischoff, Scientific American
- An aperiodic monotile, David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, and Chaim Goodman-Strauss
- A chiral aperiodic monotile, David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, and

Chaim Goodman-Strauss