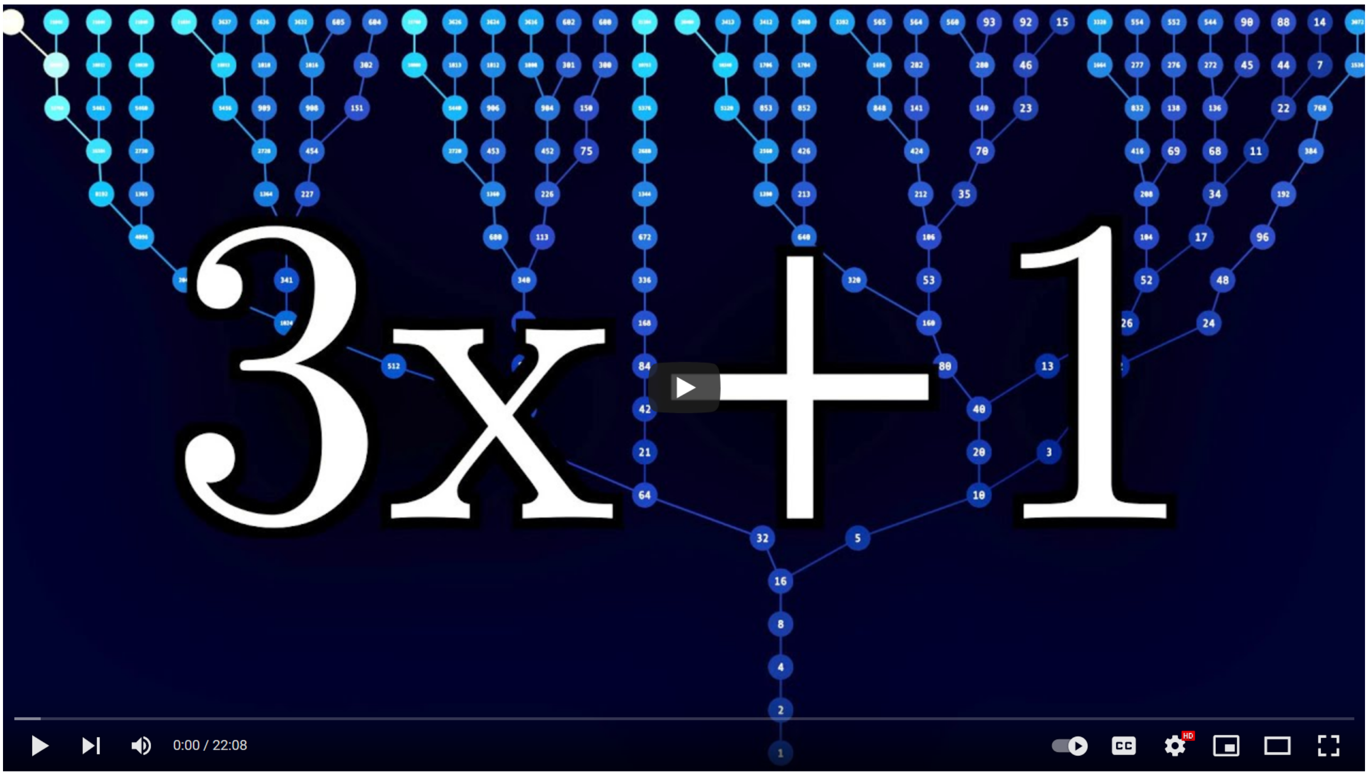
Het vermoeden van Collatz

Het is een ogenschijnlijk eenvoudig probleem dat je zonder vergevorderde kennis van wiskunde kunt begrijpen. Maar ondanks de verraderlijke eenvoud, waarschuwen ervaren wiskundigen hun jongere collega’s om niet hun tijd eraan te verspillen. Hoewel het probleem makkelijk te beschrijven en eenvoudig te testen is, is de oplossing ervan namelijk vrijwel onmogelijk om te bewijzen. We hebben het hier over het vermoeden van Collatz, en het werkt als volgt.



Neem een willekeurig positief geheel getal, zo groot als je maar wil. Er zijn dan twee opties: het getal is even, of het is oneven. Is het getal even? Halveer het dan. Is het getal oneven? Vermenigvuldig het dan met 3 en tel er 1 bij op. Na het toepassen van één van deze twee regels heb je een nieuw getal, waarop je de regels opnieuw kunt toepassen. Door dit herhaaldelijk te doen krijg je een eindeloze reeks getallen. Het vermoeden van Lothar Collatz, een wiskundige uit de vorige eeuw, stelt dat ongeacht het getal dat je hebt gekozen, je altijd na een eindig aantal stappen uitkomt in een lus, namelijk 1-4-2-1 enzovoorts.

Ook in de natuurkunde kom je reeksen getallen zoals die van Collatz vaak tegen. Je hebt een bepaalde beginsituatie, hebt eenvoudige regels (natuurwetten) om daaruit een nieuwe situatie te voorspellen, en die nieuwe situatie is vervolgens weer het uitgangspunt voor het opnieuw toepassen van de regels. Ook modellen zoals jager-prooimodellen zijn een goed voorbeeld van die situatie. Ook in meer realistische modellen is de vraag vaak: wordt er uiteindelijk een evenwichtssitutaie bereikt? De reeks van Collatz is misschien wel het eenvoudigste 'toy model' waarin je die interessante vraag kunt stellen.

Laten we het idee eens uitproberen met het getal 12. Dat is een even getal, want het is deelbaar door 2, en dus halveren we het, wat 6 geeft. Ook dat is een even getal, en zodoende halveren we het opnieuw. Nu hebben we 3, wat oneven is, dus we vermenigvuldigen het met 3 en tellen er 1 bij op, wat 10 geeft. Dat halveren we dan, en 5 is weer oneven, wat leidt tot 16. Dit kunnen we nu meermaals halveren, totdat we bij 1 uitkomen. Voor het getal 12 krijgt Collatz dus gelijk en eindigen we bij het getal 1, na welgeteld 10 stappen. Je kunt dit voor eindeloos veel getallen blijven proberen en je zult (hoogstwaarschijnlijk!) zo altijd uitkomen bij 1.

Ondanks de eenvoud van dit spel, is het nog geen enkele wiskundige gelukt het vermoeden van Collatz te bewijzen. Dat betekent dat we dus nog niet zeker weten of de reeks daadwerkelijk vanuit *ieder* getal eindigt bij de 1. Het zou kunnen dat er nog een andere 'lus' bestaat waarin je vast kunt komen te zitten, of misschien dat de reeks voor bepaalde beginwaarden langzaam afdwaalt naar oneindig. De routes die getallen afleggen lijken nagenoeg compleet willekeurig, en het blijkt buitengewoon moeilijk te zijn om te voorspellen hoe snel de reekst die begint bij een bepaald getal naar de 1 zal 'afzakken'. Neem bijvoorbeeld het getal 26; dat doet er net zoals ons eerste voorbeeld 10 stappen over om de 1 te bereiken. Maar als we nu 27 nemen, blijkt het pad er heel anders uit te zien. Dit getal doet er namelijk 111 stappen over, en tikt op een zeker moment het hoge getal 9232 aan!

Mocht dit probleem je interesse hebben gewekt, of denk je ondanks alle waarschuwingen dat jij deze stelling wel kan bewijzen, dan raden we je aan de volgende video van Veritasium over het vermoeden van Collatz te kijken om meer te leren over dit beruchte wiskunderaadsel: