# Het verbluffende leven van John von Neumann

**John von Neumann was een van de meest geniale en invloedrijke mensen uit de recente geschiedenis. Aan de hand van zijn biografie*, The Man from the Future* van Ananyo Bhattacharya, vat ik kort enkele aspecten van zijn leven samen. Hopelijk motiveert dat je om dit boek ook te lezen – een kort artikel schiet namelijk tekort om zo'n illuster personage voldoende tot zijn recht te laten komen.**

**Afbeelding 1. John von Neumann.** Foto: Los Alamos National Laboratory.

John von Neumann, geboren op 28 december 1903 in Boedapest onder de naam Neumann János Lajos, was een Hongaarse wiskundige, die zonder enige twijfel tot de meest briljante geesten in de menselijke geschiedenis behoort. Wie zijn levensverhaal terugleest krijgt de indruk dat Von Neumann het ene na het andere vakgebied op zijn kop zette of zelfs van de grond af opstartte, en dat hij tegen de tijd dat anderen de consequenties inzagen van zijn ideeën, alweer een nieuwe revolutie ergens anders aan het ontketenen was. Hoewel Von Neumann namelijk een wiskundige was, bestaat alleen het begin van zijn carrière uit het beoefenen van zuivere wiskunde. Daarna hield hij zich hoofdzakelijk bezig met zaken als natuurkunde, het bouwen van atoombommen, economie, politicologie, biologie, de eerste computers en de beginselen van kunstmatige intelligentie. Zijn gedachtegoed heeft vandaag de dag nog zoveel invloed, dat Von Neumanns relatieve onbekendheid op zijn zachtst gezegd verbazend is.

Aan het begin van de twintigste eeuw maakte hij deel uit van wat door sommigen het ‘Hongaarse fenomeen’ werd genoemd: een groep geniale Hongaarse wis- en natuurkundigen die naar Amerika verhuisden en belangrijke doorbraken maakten. Door de wetenschappers die in Los Alamos aan de atoombom werkten, werden ze de *Marsmannen* genoemd, vanwege hun accent en buitenaardse intelligentie. Toen een van hen, Nobelprijswinnaar Eugene Wigner, werd gevraagd naar de oorzaak van dit ‘fenomeen’, verklaarde hij dat het fenomeen helemaal niet bestond – en dat het enige fenomeen dat om verklaring vroeg, het fenomeen John von Neumann was.

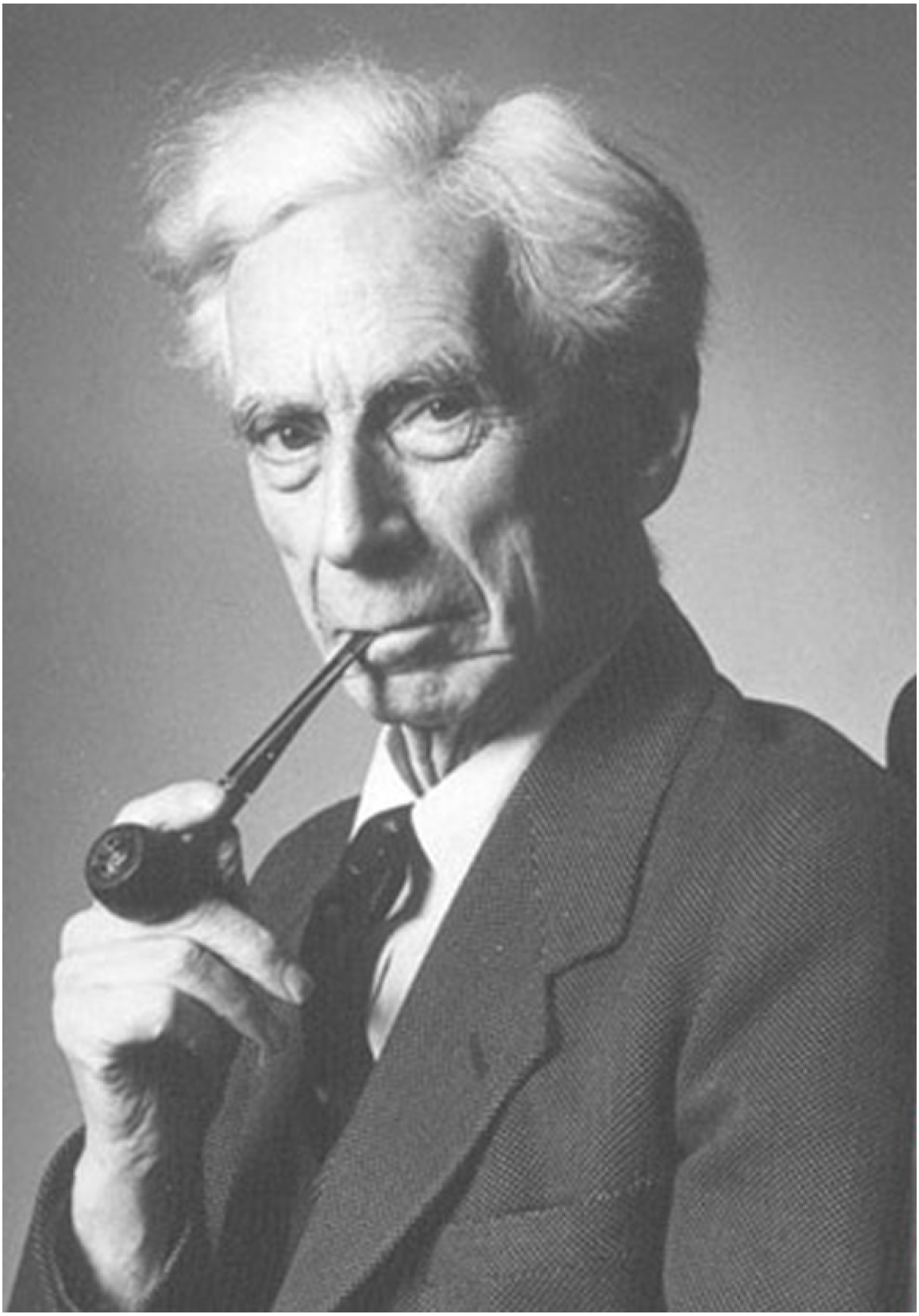
Von Neumann groeide op in een rijke Joodse familie, in een tijd waarin grofweg een kwart van de bevolking van Boedapest Joods was. In de laatste twintig jaar van de 19e eeuw waren vanwege het groeiende antisemitisme veel Joden in Europa naar Hongarije getrokken. Veel van de Joodse families die op wat voor manier dan ook succesvol en rijk waren, werden in Hongarije benoemd tot de adel. Zo ook de Neumanns, waarvan velen hun naam veranderden in een meer Germaanse of Hongaarse versie. Hoewel de vader van John dat nooit deed, heeft hijzelf dat later wel gedaan: de naam Neumann veranderde in Von Neumann.

Aan intellectuele stimulatie heeft Von Neumann in zijn jeugd geen tekort gehad. Zijn vader kocht een grote collectie boeken voor zijn zoons en John maakte daar goed gebruik van. De status van zijn vader maakte ook dat er geregeld stimulerende figuren over de vloer kwamen, dat Von Neumann persoonlijke instructie kon krijgen van vooraanstaande wiskundigen en dat hij naar een elitaire school kon gaan. Daar besefte men al snel dat hij een bijzondere gave voor wiskunde had, en hij mocht aan de universiteit extra lessen krijgen, waarna hij al op zijn zeventiende zijn eerste wiskundige artikel publiceerde over de nulpunten van zogeheten Chebyshevpolynomen.

Zijn volgende bijdrage aan de wetenschap, en gelijk ook de eerste bijdrage die hem naamsbekendheid gaf, lag in het oplossen van een grote crisis die was ontstaan rond de fundamenten van de wiskunde. Tegen het einde van de 19e eeuw begonnen wiskundigen gaten te slaan in de *Elementen* van Euclides, sinds 300 v.C. het fundament van de meetkunde. Het bleek nodig om de meetkunde vanaf de grond opnieuw en beter op te bouwen. Dit werd in 1899 gedaan toen David Hilbert, een van de meest invloedrijke wiskundigen van het begin van de 20e eeuw, zijn *Grundlagen der Geometrie* publiceerde. In zijn werk bouwde Hilbert de meetkunde opnieuw op, op een meer abstracte en rigoureuze manier. Al snel besloot hij dat heel de wiskunde op soortgelijke, rigoureuze *axiomatische* wijze opgebouwd moest worden en hij daagde zijn generatiegenoten uit om hetzelfde als wat hij met de meetkunde had gedaan, te doen voor de rest van de wiskunde.

**Afbeelding 2. David Hilbert.** Foto via Wikimedia Commons, auteur onbekend.

Rond dezelfde tijd struikelde Bertrand Russell, een filosoof en logicus, over een paradox in de verzamelingenleer – een erg geliefde tak van wiskunde, uitgevonden door de wiskundige Georg Cantor. Stel dat je een verzameling van verschillende soorten fruit hebt; laten we die verzameling F noemen. De verzameling F maakt niet deel uit van zichzelf; een verzameling van soorten fruit is immers zelf niet een soort fruit. Een verzameling G van dingen die *niet* een soort fruit zijn, is wel een deel van zichzelf. Stel je nu voor dat je een verzameling H maakt die bestaat uit verzamelingen die geen deel uitmaken van zichzelf. Als deze verzameling H *niet* deel uitmaakt van zichzelf, dan moet hij per definitie dus *wel* deel uitmaken van zichzelf… Ziedaar de paradox. Deze redenering lijkt misschien een beetje van het kaliber paradox 'Deze uitspraak is een leugen' (wat het ook is), maar de paradox was destijds wel degelijk reden tot grote zorgen bij veel wiskundigen. Wanneer je de logische basis van de wiskunde probeert te beschrijven, zoals Russell deed, dan is het een groot probleem als je op een onontkoombare tegenspraak stuit. Russell zelf heeft dan ook meerdere jaren deze tegenspraak proberen op te lossen, maar zonder veel resultaat. Hij begon zich er zelfs druk over te maken dat hij de rest van zijn leven hieraan zou spenderen.



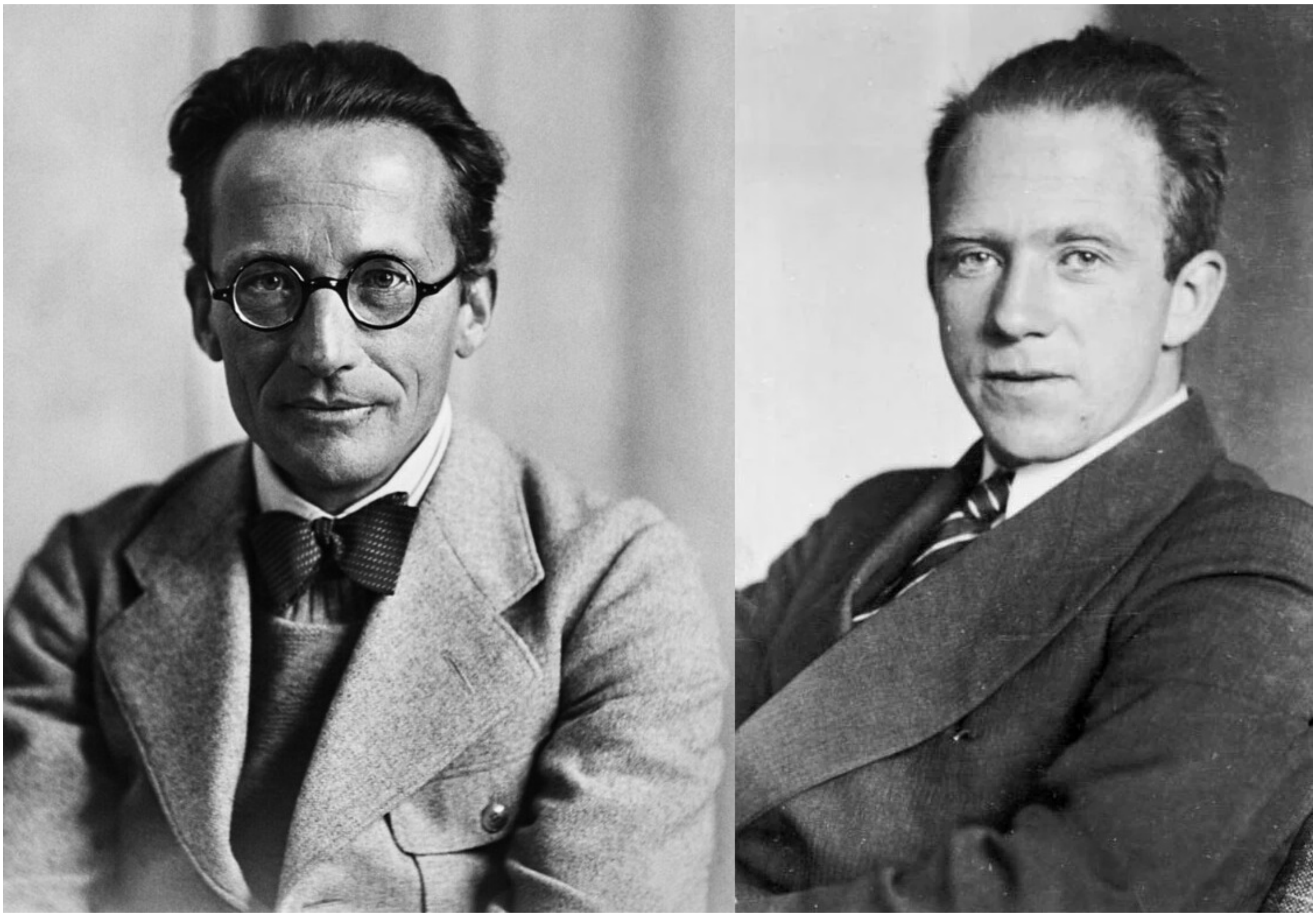
**Afbeelding 3. Bertrand Russel.** Foto via Flickr, Aldo Cavini Benedetti.

Gelukkig was daar John von Neumann. De jonge Von Neumann had inmiddels zijn middelbare school afgemaakt en reisde heen en weer tussen Boedapest, waar hij een doctorale positie in de wiskunde had, en Berlijn, waar hij twee jaar lang een opleiding scheikunde moest volgen van zijn vader (‘Met wiskunde verdien je geen geld’). Vervolgens zou hij een opleiding scheikundige technologie in Zürich gaan doen. Von Neumann begon zijn bijdrage aan het oplossen van de crisis in de verzamelingenleer in 1921 toen hij, vlak voor het einde van zijn middelbare school, een artikel publiceerde waarin hij de verzameling van *ordinaalgetallen* rigoureus definieerde. Gedurende de volgende jaren werkte hij aan een rigoureuze herdefiniëring van de verzamelingenleer – werk wat het onderwerp van zijn proefschrift, *De axiomatisering van de verzamelingenleer*, zou worden, en waarin hij terloops de paradox van Russell oploste. Von Neumann ging voor die oplossing uit van een andere set axioma’s, of aannames, waarbij er niet zoiets bestaat als een ‘verzameling van verzamelingen’. In hedendaagse termen spreken we over een groep verzamelingen die een eigenschap delen als een *klasse*. Een klasse van verzamelingen die niet een deel van zichzelf zijn, is niet deel van zichzelf, want een klasse is geen verzameling!

Deze herdefinitie is een voorbeeld van wat Hilbert voor ogen had voor heel de wiskunde. Hij wilde bewijzen dat de wiskunde compleet, consistent en beslisbaar is. *Compleet* houdt in dat alle beweringen die waar zijn, bewezen kunnen worden vanuit een eindige set aannames. *Consistent* houdt in dat de aannames niet tot tegenspraken leiden (zoals de paradox van Russell) en *beslisbaar* houdt in dat er voor elke bewering een algoritme is dat kan laten zien of de bewering bewezen kan worden. Binnen tien jaar nadat Hilbert deze doelen had gesteld, in 1928, zouden alle drie deze wensen in duigen vallen. Als je niet bang bent voor een existentiële crisis, zoek dan op internet bijvoorbeeld eens de *onvolledigheidsstelling van Gödel* op.

Ongetwijfeld doordat von Neumann zo briljant de geliefde verzamelingenleer van de ondergang had gered, kon hij na zijn doctorale onderzoek terecht bij Hilbert op de Universiteit van Göttingen – in die tijd het meest prestigieuze wiskundige instituut van de wereld. In diezelfde tijd liep daar de natuurkundige Werner Heisenberg rond, die in 1925 de eerste consistente versie van de quantummechanica publiceerde. Max Planck had in 1900 al voorgesteld dat objecten die straling opnemen en uitzenden dat alleen in kleine, ondeelbare stukjes, quanta, doen. Vervolgens stelde Einstein in 1905 dat licht zelf van deze kleine quanta, *fotonen* in dit geval, gemaakt is. Ten slotte stelde Niels Bohr weer enkele jaren later een model van het atoom voor waarin quantum- en klassieke mechanica samenkomen en waar het elektron in een baan rond de kern cirkelt en quanta opneemt of afstoot wanneer het tussen lagere en hogere banen rond de kern springt. Dit model van het atoom riep vragen op, zoals de vraag waarom het elektron alleen in bepaalde banen mag vertoeven, en hoe het instantaan van baan wisselt.

De oplossing kwam toen Heisenberg zijn model van de quantummechanica presenteerde. In de theorie van Heisenberg kan bijvoorbeeld net als bij Bohr het elektron in een atoom van een hogere, of aangeslagen energietoestand naar een lagere energietoestand vallen, en daarbij een foton uitzenden met een bepaalde energie die gelijk is aan het verschil van de toestandsenergieën, maar er wordt niet aangenomen dat die elektronen ondertussen in banen rond de kern cirkelen. De uitgezonden energieën kan je vervolgens in een tabel zetten, met bijvoorbeeld in rij 2 en kolom 4 de energie van het foton dat vrijkomt wanneer het elektron van energieniveau 4 naar niveau 2 valt. Aangezien deze energieovergangen instantaan gebeuren, is het niet onderscheidbaar wanneer een elektron van energieniveau 4 naar 3 en meteen naar 2 doorvalt, en wanneer in één keer van 4 naar 2. De kans dat dat laatste gebeurt moet dus even groot zijn als de vermenigvuldiging van de kansen op de eerste twee overgangen. Om dit soort kansen op een handige manier te vermenigvuldigen, zette Heisenberg deze kansen ook in tabellen die hij dan met elkaar kon vermenigvuldigen. Hij ontdekte daarbij dat, als je tabel A vermenigvuldigt met tabel B, het resultaat niet hetzelfde is als wanneer je tabel B met A vermenigvuldigt – oftewel: AB \( \neq \) BA, zoals je bij normale getallen wel verwacht. Wiskundejargon hiervoor is dat de twee *niet commuteren*. Destijds was dit een vreemde eigenschap voor natuurkundigen, maar tegenwoordig kan elke eerstejaars bachelorstudent je vertellen dat dit niet-commuteren veel voorkomt, en dat het bij de tabellen van Heisenberg om *matrices* gaat. Max Born liet vervolgens zien dat soortgelijke tabellen voor de positie en de impuls van een deeltje ook niet commuteren, en daaruit volgt weer het bekende onzekerheidsprincipe van Heisenberg: je kan niet tegelijkertijd de precieze positie en de precieze impuls van een deeltje weten.



**Afbeelding 4. Erwin Schrödinger en Werner Heisenberg.** Foto links: Nobelcomité. Foto rechts: Bundesarchiv.

Het volgende probleem kwam in 1926, toen Erwin Schrödinger zijn eigen theorie van de quantummechanica publiceerde, gebaseerd op het idee dat deeltjes zich als een golf kunnen gedragen. Schrödinger bedacht een vergelijking die de vorm van deze golf beschreef. Hoewel hier ook vragen mee gepaard gingen (wat is deze golf en door welk medium beweegt deze golf?) was de wiskunde bekend, in tegenstelling tot de matrixwiskunde van Heisenberg, waardoor Schrödingers versie in eerste instantie erg populair was. De belangrijke vraag was echter hoe het kon dat twee theorieën die ogenschijnlijk zo totaal verschillend waren, dezelfde realiteit beschreven en tot dezelfde conclusies leidden. Er moest haast wel een achterliggende connectie zijn.

Rond dezelfde tijd begon von Neumann bij Hilbert te werken, en Hilbert was geïnteresseerd in het wiskundig goed definiëren van de fundamenten van de natuurkunde, zoals hij dat ook voor zijn wiskunde wilde. Hilbert bleek een expert in precies de wiskunde die schuilging achter beide nieuwe theorieën. Hilbert had echter moeite om de nieuwe quantummechanica van Heisenberg te begrijpen, maar von Neumann zag in dat de nieuwe theorieën te formuleren waren in termen van wiskunde die Hilbert al jaren eerder had ontwikkeld. De vergelijking van Schrödinger ziet er in eenvoudige vorm uit als

$$H \Psi = E \Psi.$$

In deze uitdrukking is H de *Hamiltoniaan,* een ‘operator’ die iets doet met de ‘toestand’ $\Psi$; de Hamiltoniaan haalt namelijk informatie uit de toestand over zijn energie. Schrödingers vergelijking zegt nu dat het toepassen van deze operator op de toestand gelijk moet zijn aan het vermenigvuldigen van die toestand met een getal E, de energie. In wiskundige termen, bedacht door Hilbert, noemen we $\Psi$ een *eigenfunctie* van H, en is E de bijbehorende *eigenwaarde*.

Ook Heisenbergs matrixmechanica kan in termen van operatoren, eigenfuncties en eigenwaarden geformuleerd worden. Een operator kan bijvoorbeeld opgeschreven worden in termen van een matrix. Er was alleen in eerste instantie geen ‘toestand’ in de theorie van Heisenberg, want Heisenberg wilde alles formuleren in termen van meetbare dingen, zoals de energieën, en de toestand zelf valt hier niet onder.  Een toestand wordt daarom nog extra geïntroduceerd, als een oneindige kolom getallen waarop de operator werkt – een kolom die we een *vector* noemen. Zulke vectoren maken deel uit van een oneindigdimensionale *Hilbertruimte:* elk getal in de kolom beschrijft een dimensie. De getallen in de kolom mogen echter niet te veel ‘uit de hand lopen’: als je alle getallen in de vector kwadrateert en bij elkaar optelt, moet het resultaat eindig zijn.

Een dergelijke Hilbertruimte kan ook gevormd worden door bepaalde functies, in plaats van vectoren. Functies die, wanneer je ze kwadrateert en integreert over hun hele domein, eindig zijn, kunnen bijvoorbeeld ook een Hilbertruimte vormen. De toestanden, of golffuncties, van de theorie van Schrödinger zijn precies dit soort functies. De uiteindelijke interpretatie van die golffuncties is namelijk dat, wanneer je de golffunctie kwadrateert en het oppervlak onder deze gekwadrateerde functie berekent, bijvoorbeeld tussen positie a en positie b, je de kans vindt dat het deeltje zich bevindt tussen a en b. Aangezien de kans dat je in de hele ruimte érgens het deeltje vindt 1 is, dus 100%, moet de integraal van de golffunctie – het oppervlak – gekwadrateerd over zijn hele domein 1 zijn. De golffuncties zijn dus precies dit soort *gekwadrateerd integreerbare functies,* en vormen dus net als de vectoren in de matrixrekening van Heisenberg óók een Hilbertruimte.

Nog een stapje verder gaand blijkt dat je zo’n gekwadrateerd integreerbare functie ook kan schrijven als een oneindige som van functies die onafhankelijk van elkaar zijn, allemaal gewogen door een coëfficiënt. Je vindt dan dus een uitdrukking van de vorm

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n.$$

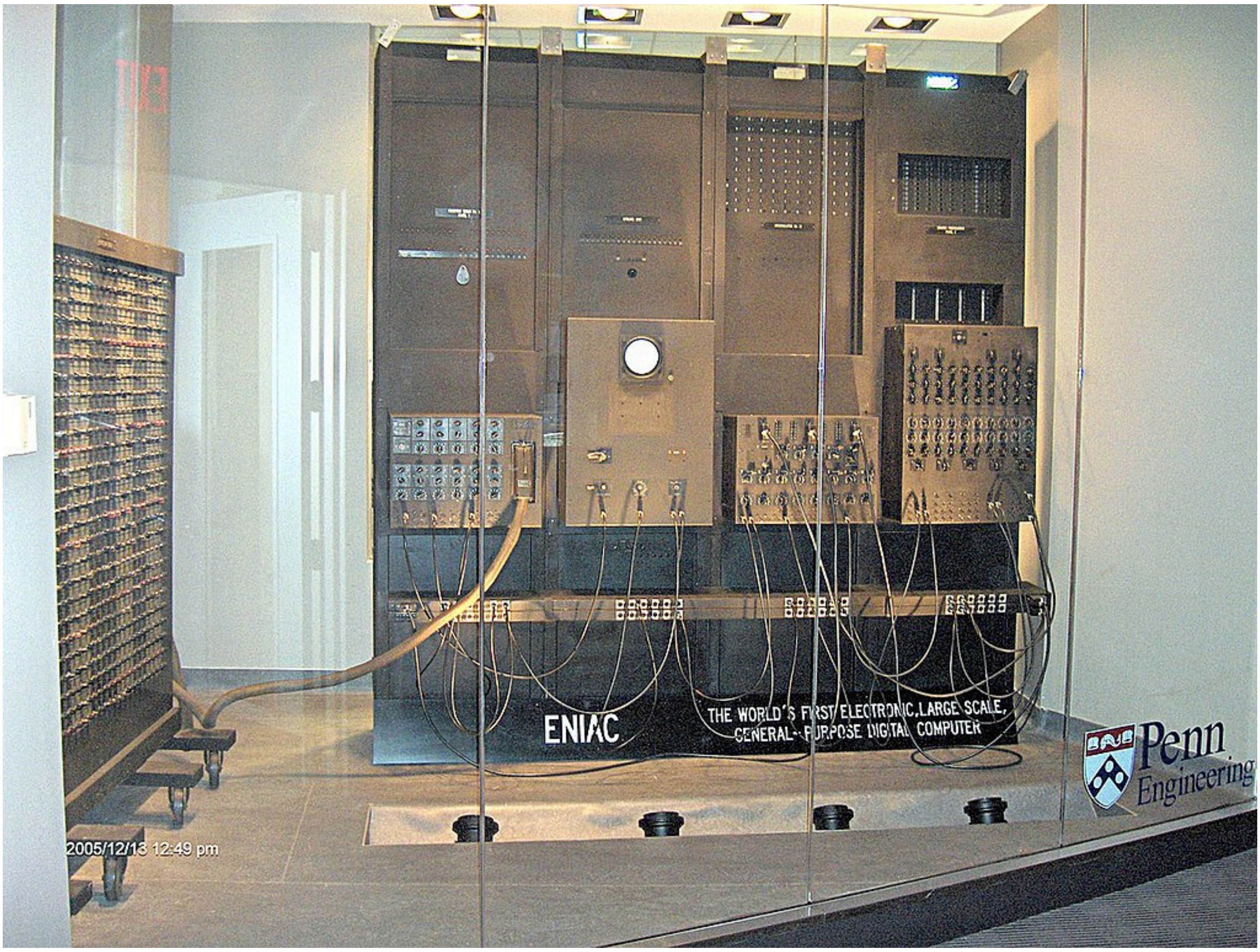
Als je vervolgens al deze coëfficiënten kwadrateert en bij elkaar optelt, moet dat ook weer 1 opleveren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 =1.$$

Dit klinkt misschien bekend. Alle coëfficiënten van de vectoren in de Hilbertruimte van Heisenberg moesten gekwadrateerd en gesommeerd ook een eindig resultaat geven. De coëfficiënten hierboven en de getallen uit die vector blijken dan ook dezelfde! Von Neumann was hiermee de eerste die de werkelijke wiskundige basis van de quantummechanica bedacht, in termen van de Hilbertruimten, die hij naar zijn mentor vernoemde. Zo vond hij de connectie tussen Schrödingers golfmechanica en Heisenbergs matrixmechanica. In de volgende jaren werkte hij aan zijn axiomatisering van de quantummechanica, waarbij hij uit de wiskundige beginselen van de Hilbertruimte alle eigenschappen van quantumtheorie liet zien. Het werk werd uiteindelijk gepubliceerd als *De wiskundige fundamenten van quantummechanica* in 1932, en is nog steeds een standaardwerk.

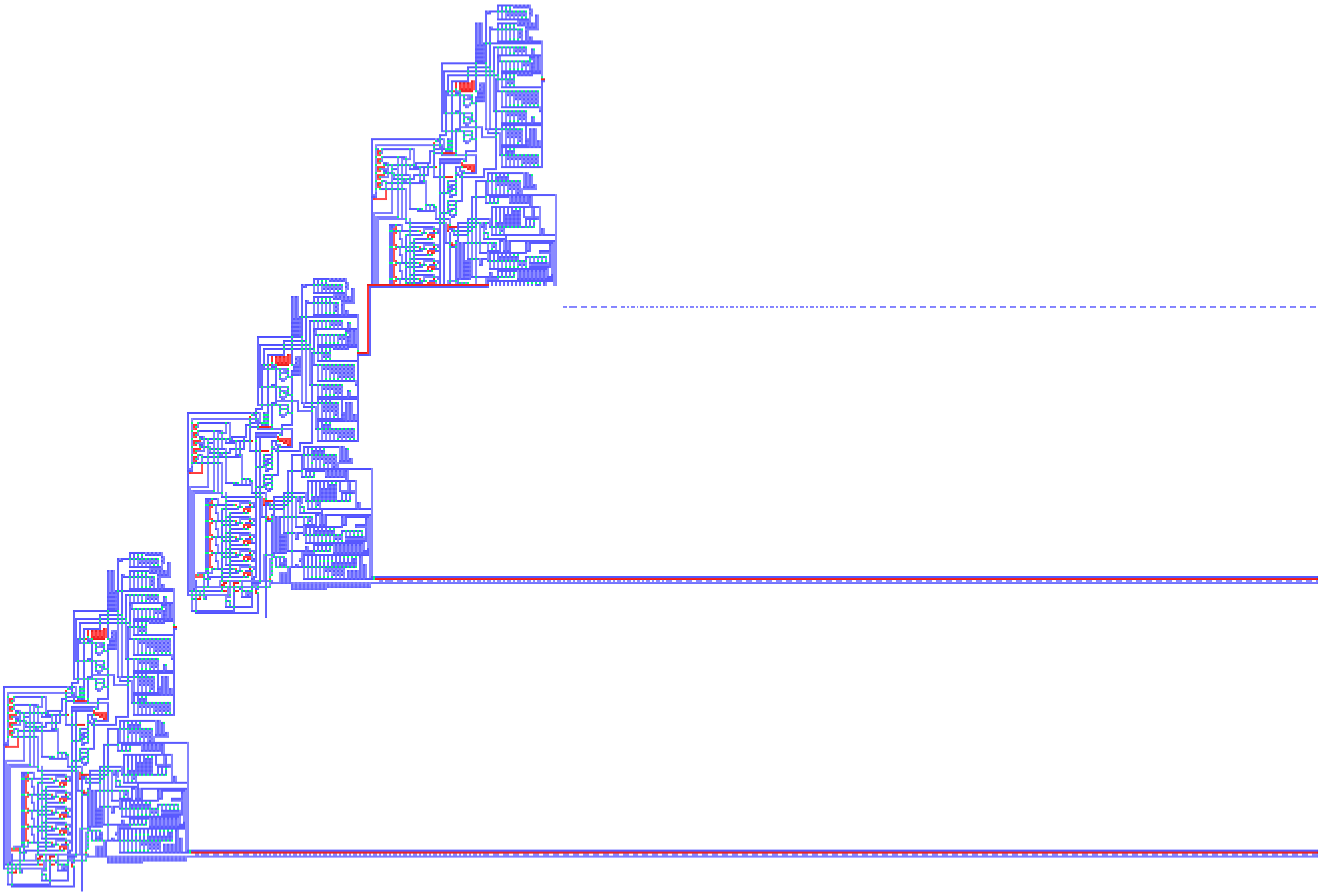
Hoewel de bovenstaande bijdrage aan de natuurkunde (en de daarop volgende generalisatie naar zogeheten von Neumann-algebra’s, waar ik zelf onderzoek naar doe) voor mij het meest interessant is, is het pas het begin van Von Neumanns bijzondere carrière, en in de ogen van velen misschien een van zijn minder maatschappelijk relevante bijdragen. Zo zou Von Neumann aan het begin van de Tweede Wereldoorlog naar Amerika verhuizen, waar hij enorme bijdragen leverde aan het atoombomproject van Amerika, waarvoor hij bijvoorbeeld de meest effectieve interne structuur voor de bom berekende, en de hoogte waarop de bom zou moeten exploderen voor de meeste impact.

Misschien was de bijdrage van Von Neumann met de meeste impact echter wel de volgende: na de oorlog raakte hij geobsedeerd door computers. Hij realiseerde zich als een van de eersten wat de potentie van de computer zou zijn. Hij ging zich bemoeien met een van de eerste computers, de ENIAC. De ENIAC had als doel om berekeningen uit te voeren voor militaire doeleinden, en was doordat de machine alleen daarvoor ontworpen was vrij inflexibel. Von Neumann nam het ontwerp van de ENIAC, sneed alle onnodige componenten weg, en ontwierp een veel flexibelere computer die je makkelijk kon herprogrammeren om andere berekeningen te doen. Hij schreef zijn ideeën op in *Een eerste versie van een verslag over de EDVAC*, tot op de dag van vandaag het meest invloedrijke document in de geschiedenis van de computer. De daarin geschetste *Von Neumann-architectuur* vormt ook vandaag de dag nog altijd de basis voor alle moderne computers.




**Afbeelding 6. De ENIAC, een van de eerste computers.** Foto via Wikimedia Commons.

Hoewel von Neumann zich de rest van zijn leven ook nog met computers bezighield, heeft hij daarna nóg een revolutie ontketend in de economische wetenschap, toen hij samen met Oskar Morgenstern de *speltheorie* uitvond. Speltheorie betekende een radicale omwenteling in de economische wetenschap, naar een meer exacte, wiskundige aanpak, en had ook implicaties voor politicologie, psychologie, sociologie en evolutionaire biologie – en voor daadwerkelijke spellen: professionele pokerspelers maken vandaag de dag uitgebreid gebruik van de speltheorie. Er ontstond ook een denktank genaamd RAND, gevuld met von Neumann-enthousiastelingen die zijn speltheorie gingen toepassen op vraagstukken rondom nationale veiligheid en atoomwapenbeleid. Tenslotte, in wéér een ander vakgebied, voorspelde Von Neumann correct de benodigde onderdelen van DNA met zijn *replicator theory*, met daaropvolgende ontwikkelingen zoals *Conway's game of life* – google dit, voor een leuke verrassing.



**Afbeelding 7. Von Neumanns universele constructor.** Von Neumanns universele constructor is een theoretische machine die zichzelf kan repliceren. In de afbeelding zie je drie generaties, waarvan de lange staart de instructies vormen om zichzelf na te bouwen. Dit concept zou uiteindelijk het veel simpelere Conway's Game of Life en vergelijkbare ontwikkelingen inspireren. Afbeelding via Wikimedia Commons.

Al met al is het lastig of zelfs onmogelijk om de carrière van John von Neumann op bevredigende manier hier samen te vatten. Ik zou bovenal aanraden de prachtige biografie, geschreven door Ananyo Bhattacharya, te lezen: *The Man From the Future: The Visionary Life of John von Neumann*, waar het grootste deel van dit artikel op is gebaseerd. De enorme kracht van dit boek ligt in de grote hoeveelheid context en zijsporen, die in dit korte artikel vrijwel volledig ontbreken. En voor wie niet zo'n lezer is: ik hoop dat de volgende blockbuster die verschijnt *Von Neumann* zal heten.