Gebroken dimensies

Wat is de dimensie van een sneeuwvlokje? Om die vraag te kunnen beantwoorden duiken we in de mysterieuze wereld van fractals: oneindig gedetailleerde patronen die zich op steeds kleinere schaal herhalen. Onderweg zullen we zien hoe een lengtemeting van de Britse kustlijn, zelfgelijkende broccoli en fractale sneeuwvlokjes onze meetkundige intuïtie op z'n kop zetten, en waarom de dimensie van deze figuren 'gebroken' is.

Afbeelding 1. IJskristallen. IJskristallen als voorbeeld van fractals. Foto: Pxfuel.

Hoe lang is de kustlijn van Groot-Brittannië?

Het idee van `gebroken' dimensies werd voor het eerst gebruikt door de Frans-Poolse wiskundige Benoît Mandelbrot in een artikel uit 1967. Hij baseerde zich op werk over grensmetingen door de Engelse wiskundige Lewis Fry Richardson van een aantal jaar eerder. Richardson deed onderzoek naar de lengte van landsgrenzen – en het effect hiervan op het ontstaan van oorlogen. Daarbij deed hij een opmerkelijke ontdekking: de grens tussen Portugal en Spanje had geen eenduidige lengte. Volgens de Portugezen was de grens 987 km lang, maar de Spanjaarden lieten wel 1214 km noteren. Dit leidde Richardson tot een verrassende stelling, namelijk dat er een fundamenteel probleem is met het opmeten van grenzen die onregelmatigheden vertonen.

Dit probleem kan het beste worden uitgelegd met behulp van een voorbeeld – hetzelfde dat Mandelbrot in zijn originele artikel gebuikte: een lengtemeting van de kustlijn van Groot-Brittannië. Kustlijnen zijn ruig. Hoe verder je inzoomt, hoe meer details er tevoorschijn komen: een baai of inham die je vanaf een bepaalde hoogte in de lucht bekijkt, blijkt veel meer structuur te hebben – in de vorm van kleinere inhammen en uitstulpingen – zodra je verder inzoomt. Dit heeft gevolgen voor de gemeten lengte. Normaal gesproken verwacht je dat een kleinere meetlat je een nauwkeurigere benadering van de lengte geeft. Bij het opmeten van een plank bijvoorbeeld, krijg je een nauwkeuriger antwoord zodra je millimeters gebruikt in plaats van centimeters. Verrassend genoeg is dit bij een kustlijn niet het geval: zodra je een kleinere meetlat gebruikt, moet je meer details – dat wil zeggen meer inhammen en uitstulpingen – meenemen, en wordt de totale lengte van de kustlijn alleen maar langer. Je kunt de lengte van de kustlijn zelfs arbitrair groot maken, door een steeds kleinere meetlat te gebruiken. Hoe korter de meetlat, hoe langer de grens!

Afbeelding 2. Een lengtemeting van de kustlijn van Groot-Brittannië. In de drie plaatjes (van link naar rechts) wordt een steeds kortere meetlat gebruikt. Het resultaat is dat de lengte die je meet, verkregen door het aantal meetlatten met de lengte van de meetlat te vermenigvuldigen, groter wordt. Daarom is er geen eenduidige lengte toe te kennen aan een \`onregelmatig’ patroon als een kustlijn. Afbeelding: [Wikimedia Commons].

Dit is waarschijnlijk de reden voor het verschil tussen de grensmeting van de Portugezen en Spanjaarden: de eersten gebruikte simpelweg een langere meetlat dan de laatsten. Omdat er geen overeenstemming is over het \`juiste’ detailniveau om de meting op te doen, is het niet mogelijk om over dé lengte van een kustlijn (of landsgrens) te spreken. In afbeelding 2 is de situatie voor de Britse kustlijn weergeven, van drie metingen met meetlatten van aflopende groottes. Je kunt zelf nagaan – door het aantal meetlatten te vermenigvuldigen met de lengte van de meetlat – dat de gemeten lengte van de kustlijn groter wordt zodra je een kleinere lat gebruikt. Dit effect staat tegenwoordig ook wel bekend als het *Richardsoneffect*.

Broccoli en zelfgelijkvormigheid

Ruim tien jaar na de observaties van Richardson ontwikkelde Mandelbrot de wiskundige theorie van *fractals*. Fractals zijn bedacht om precies deze verwarrende meetkunde van ruige kustlijnen te begrijpen. De term verwijst naar het Latijnse woord *fractus*, dat ‘gebroken’ betekent. Grofweg kun je over een fractal nadenken als een patroon dat is opgebouwd uit stukken die erg lijken op het patroon zelf. Vaak worden deze motieven op steeds kleinere schaal herhaald, zodat meer detail tevoorschijn komt wanneer je op het patroon inzoomt – denk hierbij aan het voorbeeld van de kustlijn met al haar inhammen en uitstulpingen. Deze *zelfgelijkvormigheid* blijkt ook op veel andere plekken in de natuur voor te komen. Een van de bekendste voorbeelden is de *Romanesco-broccoli*, een broccolisoort waarvan de steeltjes bijna exacte kopieën zijn van de broccoli zelf. Deze herhaling leidt tot een prachtig fractale structuur die in afbeelding 3 goed is te zien.

Afbeelding 3. Romanesco-broccoli. Romanesco-broccoli als voorbeeld van zelfgelijkvormigheid. Foto: Cyclonebill.

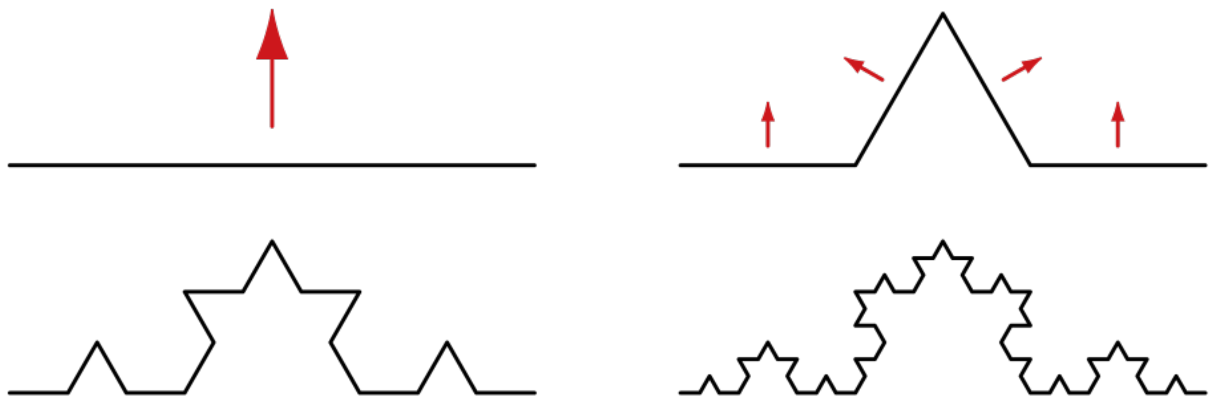
Fractale patronen komen – naast bij kustlijnen en broccoli – op tal van andere plekken in de natuur voor. De bladvorm van varens, maar ook de takstructuur van bomen of riviernetwerken lijkt erg op die van een fractal. De zelfgelijkvormigheid – die typisch is voor fractale patronen – zit bijvoorbeeld ook in sterrenstelsels, ijskristallen, bliksemschichten, wolkformaties en zelfs in de manier waarop de menselijke long zich vertakt. Zie afbeelding 4 voor een aantal van zulke voorbeelden. In de echte wereld houdt het herhalende patroon van zelfgelijkvormigheid noodzakelijkerwijs op. De fractale structuur van een kustlijn is niet meer zichtbaar wanneer je op de schaal van individuele zandkorrels terecht bent gekomen, en bij de long houdt het herhalen al op bij de individuele longblaasjes. In de wiskunde is het mogelijk om patronen te maken waarbij dit proces wel oneindig lang doorgaat met als een van de bekendste voorbeelden een fractale sneeuwvlok.

Afbeelding 4. Voorbeelden van fractale patronen in de natuur. Linksboven: de takstructuur van bomen (foto: Hernán Piñera). Rechtsboven: een nautilusschelp (foto: Jitze Couperus). Linksonder: het blad van een varen (foto: Pixnio). Rechtsonder: bovenaanzicht van een rivierdelta (foto: Stuart Rankin).

Het sneeuwvlokje van Koch

Fractalpatronen zien er vaak ingewikkeld uit, maar dit is schijn: het patroon is doorgaans gebaseerd op één simpele regel die zich op steeds kleinere schaal herhaalt. Een bekend voorbeeld van een fractal is de zogenaamde *Kochkromme*, bedacht door de Zweedse wiskundige Helge von Koch in 1904 – dus ver voordat de term fractal was geopperd. Dit blijkt voor veel meer voorbeelden het geval: de bekendste fractalpatronen stammen uit het eind van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw, toen wiskundigen als Cantor, Sierpiński en Julia patronen bedachten die de wetten van de klassieke meetkunde leken te tarten. Deze wiskundige ‘monsters’ kregen pas veel later een interpretatie als fractals.

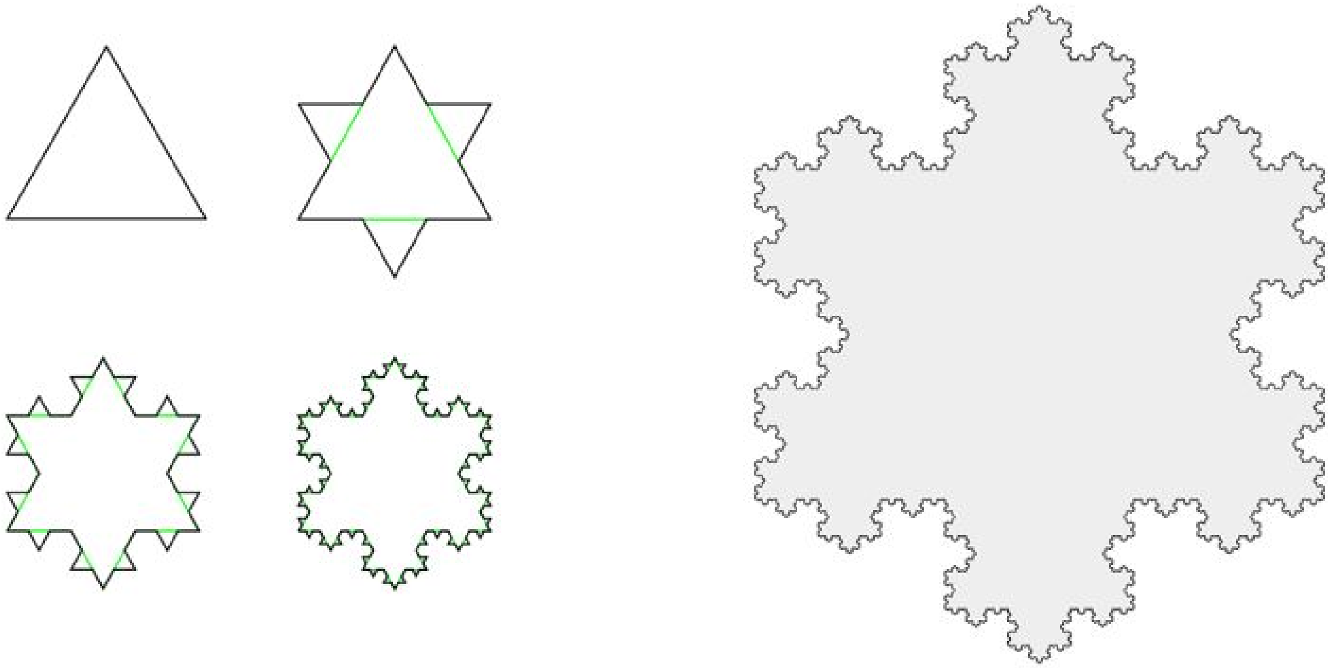
Het recept om de Kochkromme te maken is als volgt. Je start met een lijnstuk en deelt dit in drie gelijke stukken. Daarna haal je het middelste stukje weg en vervangt dit door de bovenkant van een driehoekje met even lange zijden. De kromme bestaat nu uit vier lijnstukjes, die elk één derde van de lengte van het origineel hebben. Dit is stap één in het proces: zie afbeelding 5 (rechtsboven). In stap twee herhaal je stap één, maar nu voor ieder van vier kleinere lijnstukjes. Dit resulteert in het patroon in afbeelding 5 (linksonder), dat nu uit zestien lijnstukjes bestaat. Je herhaalt deze stap opnieuw, en opnieuw, en opnieuw, op steeds kleinere schaal. Het patroon dat ontstaat na oneindig veel herhalingen noemen we de Kochkromme.



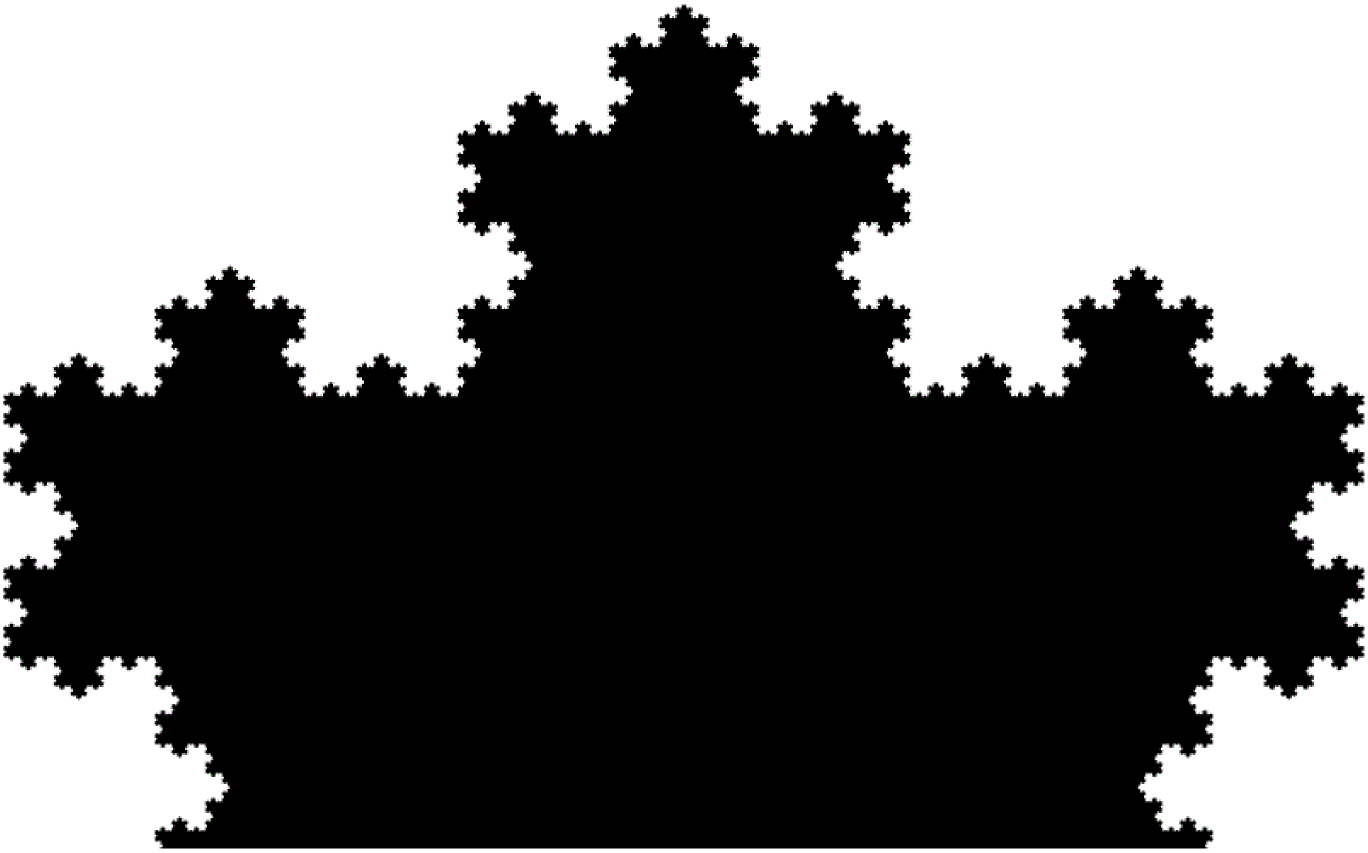
Afbeelding 5. De Kochkromme. Om het fractalpatroon te maken pas je herhaald dezelfde stap toe, maar op steeds kleinere schaal. We delen een lijnstuk (linksboven) op in drie stukken en vervangen het middelste stuk door de bovenkant van een driehoek (rechtsboven). Vervolgens passen we dit proces opnieuw toe op ieder van de vier kleinere lijnstukjes (linksonder). Na nog een herhaling ontstaat er al veel meer detail (rechtsonder). Afbeelding: [Wikimedia Commons].

We kunnen dit herhalende proces ook toepassen op de zijdes van een driehoek, zoals is weergeven in afbeelding 6. Het fractalpatroon dat je hiermee maakt heeft iets weg van een sneeuwvlokje, en wordt daarom ook wel het *sneeuwvlokje van Koch* genoemd. Dit sneeuwvlokje is een mooi voorbeeld van een fractal: het heeft een patroon dat er op iedere schaal hetzelfde uitziet. Deze zelfgelijkvormigheid wordt duidelijk als je inzoomt op een willekeurige plek op de kromme, zoals te zien is in afbeelding 7. Een hypnotisch werkend plaatje! Je vindt steeds hetzelfde patroon terug, hoe ver je ook inzoomt.

Net als bij de Britste kustlijn is het lastig om over dé lengte van (de rand van) het sneeuwvlokje te spreken. De grootte van je meetlat bepaalt namelijk hoeveel detail je van de Kochkromme registreert, en daarmee ook wat de totale lengte is die je meet. Omdat de Kochkromme oneindig veel detail heeft, kan je door een steeds kleinere meetlat te gebruiken de lengte zelfs willekeurig groot maken! In het proces waarmee we de sneeuwvlok maakten werd de lengte immers in elke stap 33% langer – en dat hebben we oneindig vaak gedaan. Dit laat zien dat de gebruikelijke notie van lengte niet veel betekenis heeft wanneer we kijken naar fractale patronen. Een manier om toch iets over de meetkunde van een fractal te zeggen is via het begrip `gebroken’ dimensie.



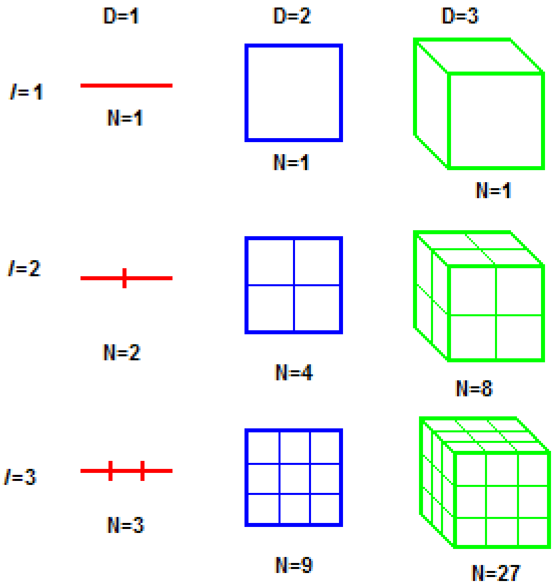
Afbeelding 6. Het sneeuwvlokje van Koch. Afbeeldingen: Wikimedia Commons (links, rechts).



Afbeelding 7. Zelfgelijkvormigheid in de Kochkromme. Hoe ver je ook inzoomt, je vindt steeds hetzelfde patroon terug! Afbeelding: Wikimedia Commons.

Dimensies berekenen

Meetkundige figuren hebben een dimensie. Zo vertelt onze gebruikelijke intuïtie over dimensie dat een lijn eendimensionaal is – die heeft namelijk alleen een lengte, terwijl je voor een tweedimensionaal oppervlak zowel een lengte als een breedte nodig hebt. Een volume heeft een lengte, een breedte en een hoogte en is daarom driedimensionaal. De dimensie van een meetkundige figuur geeft in feite aan hoe de grootte van die figuur verandert met de schaal waarop die wordt gemeten. Zodra je bij het opmeten van een lijnstuk – in één dimensie dus – een meetlat gebruikt die drie keer zo klein is, heb je ook drie keer zo veel latten nodig om de originele lengte te meten. In twee dimensies is de situatie anders: zodra ik een vierkant met kleinere vierkanten wil opvullen, elk één derde van de grootte van het origineel, heb ik er wel negen nodig. En om een kubus te vullen met drie keer zo kleine kubusjes moet je zelfs 27 kubusjes gebruiken!



Afbeelding 8. Schaling en dimensie.
De Griekse letter λ (spreek uit `lambda') geeft aan wat de verkleiningsfactor is. Van boven naar beneden: λ=1 (dit is de originele figuur), λ=2 (twee keer zo klein) en λ=3 (drie keer zo klein).
Afbeelding: Brendan Ryan.

In afbeelding 8 is de situatie overzichtelijk weergeven. Daar staan van links naar rechts een lijn, een vierkant en een kubus getekend. Je kunt deze meetkundige figuren vergelijken met kleinere varianten – dit is wat we bedoelen met een verandering van schaal – door alle lengtes van de figuur met een bepaalde schaalfactor te verkleinen. Vervolgens kun je tellen hoeveel van de kleinere lijnen, vierkanten of kubussen – dit is wat we in dit geval ‘meetlatten’ noemen – je nodig hebt om de originele figuur te overdekken. De dimensie van de figuur kun je nu berekenen door te kijken tot welke macht je de schaalfactor moet verheffen om het nieuwe aantal meetlatten te krijgen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$$N = \lambda^D.$$

Hier is D de dimensie, λ (spreek uit als `lambda') de schaalfactor en N het aantal meetlatten. Vullen we de waardes voor de lijn, het vierkant en de kubus in, zoals aangegeven in afbeelding 8, dan vinden we respectievelijk D = 1, D = 2 en D = 3. Bijvoorbeeld: voor het vierkant maakten we de meetlat 3 keer zo klein en hadden we 9 nieuwe ‘meetlatten’ nodig.

$9=3^2$, dus we vinden inderdaad dat D=2. Bij ‘simpele’ figuren als een lijn of kubus komt deze manier van nadenken over de dimensie als ‘wat er gebeurt bij schalen’ dus overeen met de gebruikelijke intuïtie die we hebben bij het begrip dimensie.

Voor fractals is de situatie iets ingewikkelder. We kunnen de dimensie van een fractal – in dit geval *fractale* of *‘gebroken’ dimensie* genoemd – nog steeds berekenen met de bovenstaande formule, maar het antwoord is in dat geval voor onze intuïtie heel vreemd. Als voorbeeld kunnen we de berekening doen voor de Kochkromme in afbeelding 5. Stel dat we onze meetlat drie keer zo klein maken, hoeveel meetlatten hebben we dan nodig om de lengte van de Kochkromme op te meten? We hebben in dit geval niet drie – zoals bij het gewone lijnstuk, maar wel vier latten nodig! De conclusie is daarmee dat bij een verkleiningsfactor λ=3, het aantal meetlatten gelijk is aan N = 4. Als we deze waardes invullen in de formule hierboven, vinden we iets verrassends, namelijk dat de dimensie gelijk is aan D = 1,262…. De fractale dimensie van het sneeuwvlokje is geen geheel getal, maar gebroken!

Het feit dat de dimensie in dit geval niet geheeltallig is – maar ergens tussen de één en de twee in zit – is typisch voor fractale patronen. De westkust van Groot-Brittannië heeft een dimensie van ongeveer D=1,25, bijna gelijk aan die van het sneeuwvlokje dus! De fractale dimensie geeft grofweg aan hoe ingewikkeld het patroon is: hoe dichter de dimensie bij één zit, hoe meer de fractal lijkt op een lijn. Zit de dimensie dichter bij twee, dan ziet het fractalpatroon er erg ingewikkeld uit en zal het na veel herhalingen een groot deel van de tweedimensionale ruimte vullen. Een voorbeeld van een fractalpatroon dat meer wegheeft van een tweedimensionaal figuur – het heeft zelfs fractale dimensie twee! – is zichtbaar in afbeelding 9. Dit is de zogenaamde *dragonfractal* – ook wel *Jurassic Park Dragon* genoemd, naar het gelijknamige boek, waarin de schrijver Michael Crichton op iedere hoofdstukpagina een afbeelding van deze fractal gebruikte. Al na een paar herhalingen lijkt het fractale patroon meer op een oppervlak, dan op een lijn.

Afbeelding 9. De dragonfractal. De dragonfractal, ook wel Jurassic Park Dragon genoemd, lijkt meer op een oppervlak dan op een lijn. Afbeelding: Jahobr.

In dit artikel hebben we gezien hoe bepaalde patronen in de natuur – zoals een sneeuwvlok of kustlijn – zich niet lijken te houden aan de `gewone' regels van de meetkunde. De wiskundige theorie van fractals is ontwikkeld om precies deze vreemde gedragingen te begrijpen. Zo kunnen we bij een fractalpatroon, dat zichzelf tot in de oneindigheid blijft herhalen, niet goed spreken over de lengte van het patroon. We hebben gezien dat je er wel een dimensie voor kunt uitrekenen, die in dat geval niet geheeltallig, maar gebroken is! Dit roept waarschijnlijk tal van nieuwe vragen op waar je je hoofd – net als de dimensie van een sneeuwvlokje – over kunt breken.