Eén vergelijking om allen te regeren

Het modelleren en uitrekenen van stromingen heeft toepassingen in ontzettend veel verschillende onderzoeksgebieden: van het in kaart brengen van de luchtstromen rondom een Formule 1-auto, via het modelleren van de bloedstroom in onze aderen, tot het voorspellen van de beweging van de ijskappen rond de Noord- en Zuidpool. Voor al deze toepassingen worden de Navier-Stokesvergelijkingen gebruikt. Ook al hebben die vergelijkingen talloze toepassingen, we weten niet wat de exacte oplossing ervan is.

Afbeelding 1. Vloeistofstromen. Ingewikkelde stromingen kunnen worden beschreven met de Navier-Stokesvergelijkingen. Afbeelding: Galen Mechert – Team Third.

De Navier-Stokesvergelijkingen zijn vernoemd naar de natuurkundige Claude-Louis Navier en de wiskundige George Stokes en beschrijven de beweging van elk soort fluïdum. Een *fluïdum* is een medium dat geen vaste vorm heeft, maar zich aanpast aan de vorm van de container waar het zich in bevindt. Hieronder vallen alle soorten gassen en vloeistoffen, maar ook sommige vaste stoffen zoals ijs en zelfs katten [1]. Om het wat eenvoudiger te houden gaan we het vanaf nu alleen hebben over vloeistoffen, maar onthoud dus dat deze vergelijkingen ook gelden voor andere media.

Dit zijn de Navier-Stokesvergelijkingen:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \qquad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{F} \qquad (2)$$

Laten we eerst even op een rijtje zetten wat alle termen betekenen. We beginnen met vergelijking (1); die heeft maar één term.

- $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz}$ heet de *divergentie* van de snelheid $\vec{u}$. Dit is de verandering van elke component van de snelheid in de bijbehorende richting. Hiermee rekenen we uit hoe de snelheid in elke richting verandert, en al die veranderingen tellen we bij elkaar op.

Volgens vergelijking (1) is voor vloeistoffen de divergentie van de snelheid 0. Dit betekent dat er even veel vloeistof ergens ingaat als er weer uitgaat: er kan geen vloeistof verloren gaan. Deze vergelijking drukt eigenlijk **behoud van massa** uit: een zeer algemene natuurwet die geldt voor alles in het universum, niet alleen voor vloeistoffen.

Laten we nu naar de termen in de grote vergelijking gaan, vergelijking (2).

- $\rho \frac{D \vec{u}}{Dt}$ is de vermenigvuldiging van de dichtheid met een speciaal soort afgeleide van de snelheid $\vec{u}$ naar de tijd. Deze speciale afgeleide (aangegeven met een hoofdletter *D* in plaats van de gebruikelijke kleine *d*) houdt er rekening mee dat de vloeistof beweegt. Deze term geeft aan hoe de snelheid verandert in de loop van de tijd en die noemen we daarom ook wel *versnelling*.
- $\nabla p = \left(\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz} \right)$ heet de *gradiënt* van de druk *p*. Dit is een vector met als componenten de verandering van de

druk in de bijbehorende richting. Deze term geeft aan dat vloeistof zal bewegen van gebieden met hoge druk naar gebieden met lage druk. Met andere woorden: er werkt een interne kracht op de vloeistof als er drukverschillen zijn.

- $\mu \nabla^2 \vec{u} = \mu \left(\frac{d^2 u_x}{dx^2}, \frac{d^2 u_y}{dy^2}, \frac{d^2 u_z}{dz^2} \right)$ is de *viscositeit* vermenigvuldig met de tweede afgeleide van de snelheid. De viscositeit is de mate van stroperigheid van de vloeistof: hoe hoger de viscositeit, hoe stroperiger de vloeistof. Zo heeft honing een hogere viscositeit dan water. Deze term drukt een interne kracht uit die veroorzaakt wordt door de wrijving van de lagen vloeistof als deze stroomt. Als de viscositeit groot is dan is er veel wrijving tussen de lagen vloeistof en zal deze kracht groot zijn.
- $\rho \vec{F}$ is de vermenigvuldiging van de dichtheid ρ met een externe kracht $\vec{F}$ die op de vloeistof werkt, bijvoorbeeld de zwaartekracht. We kunnen voor $\vec{F}$ ook de elektromagnetische kracht gebruiken en dan krijgen we *magnetohydrodynamica*, waarmee je bijvoorbeeld kunt modelleren hoe sterren en sterrenstelsels ontstaan.

Als we met al deze kennis kijken naar vergelijking (2) dan zien we dat er eigenlijk iets vrij bekends staat: massa x versnelling = kracht. Voor vloeistoffen is dichtheid namelijk grofweg hetzelfde als massa. Dit kennen we ook wel als de **tweede wet van Newton** en is helemaal niets nieuws!

De Navier-Stokesvergelijkingen drukken dus eigenlijk geen nieuwe natuurkunde uit. Ze komen neer op behoud van massa en de tweede wet van Newton, maar dan net iets anders geschreven. Dit zijn zeer algemene natuurwetten waarvan we weten dat ze juist zijn. Dat is ook de reden dat deze vergelijkingen alle soorten vloeistoffen, gassen en zelf sommige vaste stoffen beschrijven. Er is echter een groot probleem met de Navier-Stokesvergelijkingen. De vergelijkingen lijken simpel, maar we zijn eigenlijk niet in staat om ze netjes op te lossen zonder gebruik te maken van benaderingen of computers. We weten namelijk niet of de Navier-Stokesvergelijkingen überhaupt een wiskundig correcte algemene oplossing hebben. Het bestuderen van deze vergelijkingen is zelfs een van de Millenniumprijsproblemen. Degene die het lukt om ons begrip van de Navier-Stokesvergelijkingen voldoende te verbeteren zal 1 miljoen dollar krijgen.

Het lijkt misschien gek dat deze vergelijkingen zo veel gebruikt worden, terwijl ze geen goed gedefinieerde oplossing hebben, maar dat is voor alle praktische toepassingen gelukkig geen probleem, aangezien we er zeker van zijn dat de onderliggende natuurkunde klopt en we uit experimenten weten dat deze vergelijkingen kloppende resultaten geven. Desalniettemin willen wij als wetenschappers toch graag de exacte oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen vinden, want dat zal leiden tot een beter begrip van de uitkomsten en uiteindelijk zorgt het voor een beter begrip van de natuurkunde van vloeistofstromen.

Mocht je meer willen weten over de Navier-Stokesvergelijkingen en hoe het zit met de wiskundige achtergrond ervan, dan kan ik je aanraden om de onderstaande video van het YouTube kanaal Numberphile (in het Engels) te kijken:

Referentie

[1] Fardin, M. A. “On the rheology of cats.” *Rheology Bulletin* 83.2 (2014): 16-17.