Dualiteiten: wat zijn dat eigenlijk?

Dualiteiten vind je overal in de natuurkunde: de dualiteit van golven en deeltjes, de dualiteit van elektriciteit en magnetisme, de zelf-dualiteit van het Isingmodel, de zogeheten bulk-randcorrespondentie en S-dualiteit, T-dualiteit en de AdS/CFT-correspondentie in snaartheorie. Maar wat betekent het als een golf duaal is aan een deeltje, de 'bulk' van een theorie duaal is aan de rand, of als een model zelf-duaal is? En zijn zulke dualiteiten nog ergens nuttig voor? In dit artikel bekijk ik de antwoorden op deze vragen aan de hand van twee relatief eenvoudige voorbeelden: de golf-deeltjedualiteit en de zelf-dualiteit van het zogeheten "Ising model met transversaal veld".

Het woord dualiteit komt van het Latijnse woord *dualis*, dat *tweevoudig* of *twee bevattend* betekent. Het bestaan van een dualiteit kan je dus zien als het bestaan van iets dat twee kanten, zijdes of een dubbele aard bevat. Om direct met een concreet voorbeeld te beginnen: de golf-deeltjedualiteit zegt dat hetgeen we normaal als een elementair deeltje zouden beschouwen, zich ook als een golf kan gedragen. Met andere woorden: een elementair deeltje zoals een elektron heeft *twee aarden*: op sommige momenten (in het bijzonder, wanneer het gemeten wordt) gedraagt het elektron zich als een punt*deeltje* en op andere momenten als een *golf*, met een uitgespreidheid in positie, net als de watergolf die je ziet in afbeelding 1.

Afbeelding 1. Een watergolf. De golf is niet op één plek, maar op meerdere plekken tegelijk, en heeft daarmee een uitgespreidheid in positie. Bron: Katsushika Hokusai – Metropolitan Museum of Art: entry 45434.

De golf-deeltjedualiteit is mogelijk “nuttig” te noemen, in de zin dat deze voor verwondering zorgt: hoe kan één object nu het ene moment als een golf bewegen en het andere moment als een puntdeeltje? We hebben momenteel geen wiskundige beschrijving die het golfgedrag aan het puntdeeltjesgedrag relateert.[1] Het ontbreken van deze wiskundige beschrijving staat in sterk contrast met de meeste andere dualiteiten in de natuurkunde. Zo geeft de dualiteit tussen elektriciteit en magnetisme een precieze, wiskundige relatie tussen aan de ene kant een elektrisch veld en aan de andere kant een magnetisch veld. Deze relatie is *duaal* omdat een veld elektrisch of magnetisch kan lijken afhankelijk van de snelheid waarmee je beweegt ten opzichte van datgene wat het veld creëert. Het veld heeft dus *twee aarden*: een elektrische en een magnetische.

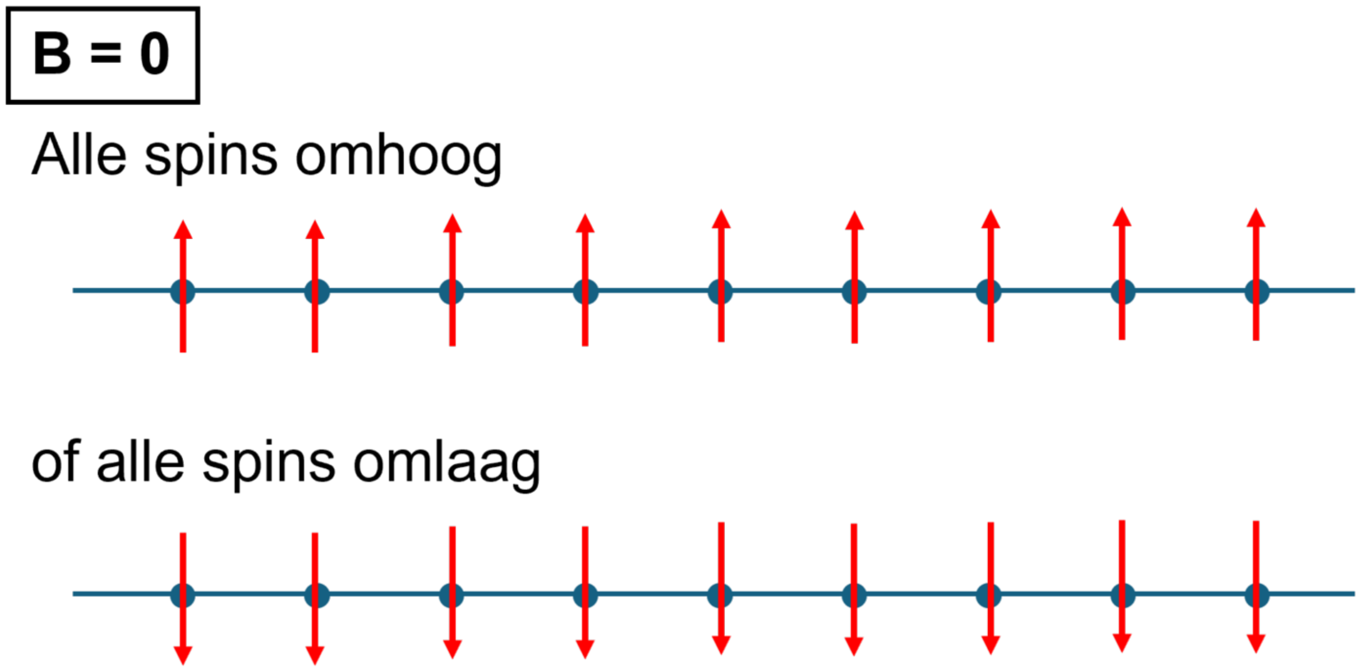
De elektromagnetische dualiteit heeft ons begrip van elektromagnetisme vergroot en heeft het doen passen in het raamwerk van de speciale relativiteitstheorie, die de natuurkunde beschrijft van objecten die met (grote) constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. Er bestaat nog een andere, veelvoorkomende vorm van dualiteit die extreem nuttig is in de natuurkunde. In deze vorm van dualiteit blijken de natuurwetten uit een of ander natuurkundig model X omgeschreven te kunnen worden tot de natuurwetten uit een ander model Y, waarover meer bekend is, of waarin makkelijker berekeningen kunnen worden gedaan. De modellen X en Y worden dan duaal genoemd. Model X heeft opnieuw twee aarden: die van zichzelf en die van model Y. Door middel van de dualiteit kan je dan via het (makkelijke) model Y nieuwe informatie verkrijgen over het (moeilijke) model X.

Een interessant voorbeeld van bovenstaande vorm van dualiteit is het *Isingmodel met transversaal veld*, een model dat als standaardvoorbeeld wordt gebruikt om allerlei interessante fenomenen in de natuurkunde te begrijpen, zoals magnetisme, spontane symmetriebreking en faseovergangen, onderwerpen waar ik later misschien nog eens meer over zal schrijven op de website. Ik zal in het vervolg van dit artikel eerst het Isingmodel introduceren aan de hand van enkele afbeeldingen en vervolgens uitleggen hoe de dualiteit van dit model erg effectief gebruikt kan worden.

Het Isingmodel beschrijft een 1-dimensionaal rooster, zoals weergegeven in afbeelding 2, waarin op de roosterpunten een deeltje met *spin* zit.

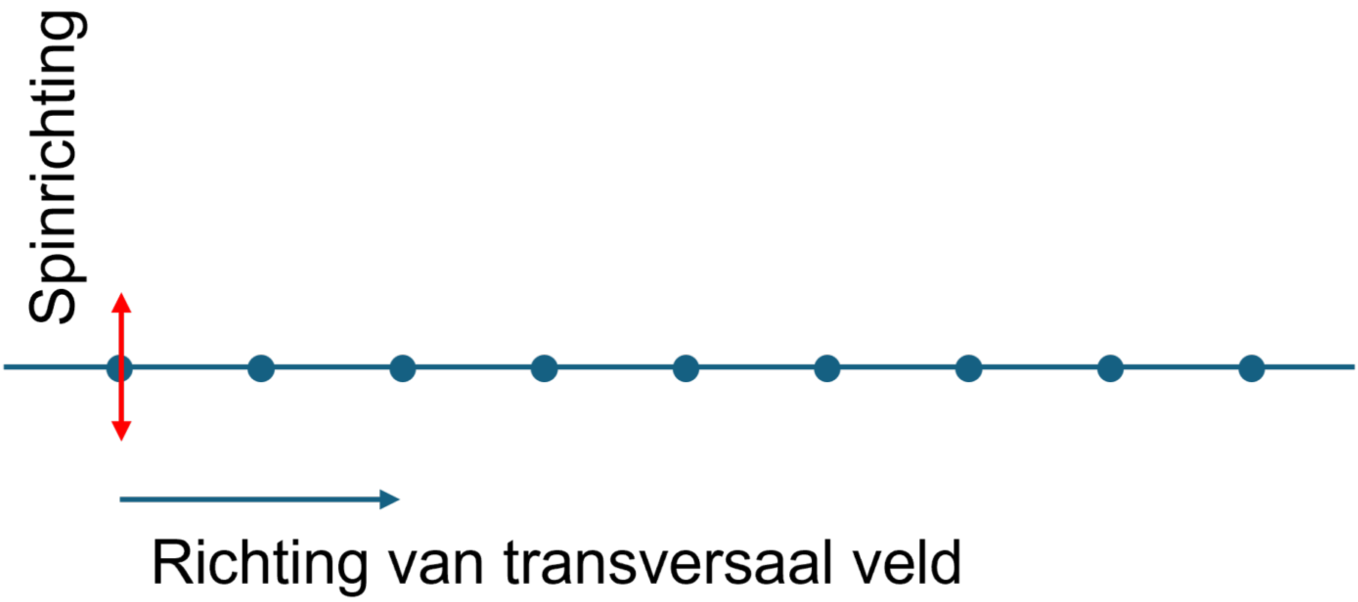
Afbeelding 2. Een 1-dimensionaal rooster. De roosterpunten zijn aangegeven met stippen.

Het is voor mijn verhaal niet nodig om precies te weten wat spin is. Het belangrijkste in het Isingmodel is dat je de spin kunt weergeven als een pijltje dat alle kanten op kan wijzen, en dat de spins van nature graag omhoog of omlaag willen wijzen. Dit geef ik weer in afbeelding 3, waar de toestanden met de laagste energie zijn weergegeven als er geen transversaal veld aanwezig is (dus: het transversale veld heeft sterkte **B=0**).



Afbeelding 3. Het Isingmodel. De weergegeven toestanden zijn de toestanden met de laagste energie wanneer het transversale veld sterkte B=0 heeft.

Merk op dat *transversaal* gewoon een chic woord is voor *dwars*. Een transversaal veld in het Isingmodel is een magnetisch veld dat dwars op de richting van de spins staat en door zijn magnetische werking de spins in de richting van het veld “duwt”. Meestal wordt het veld loodrecht op de richting van de spins gekozen, zoals weergegeven in afbeelding 4.



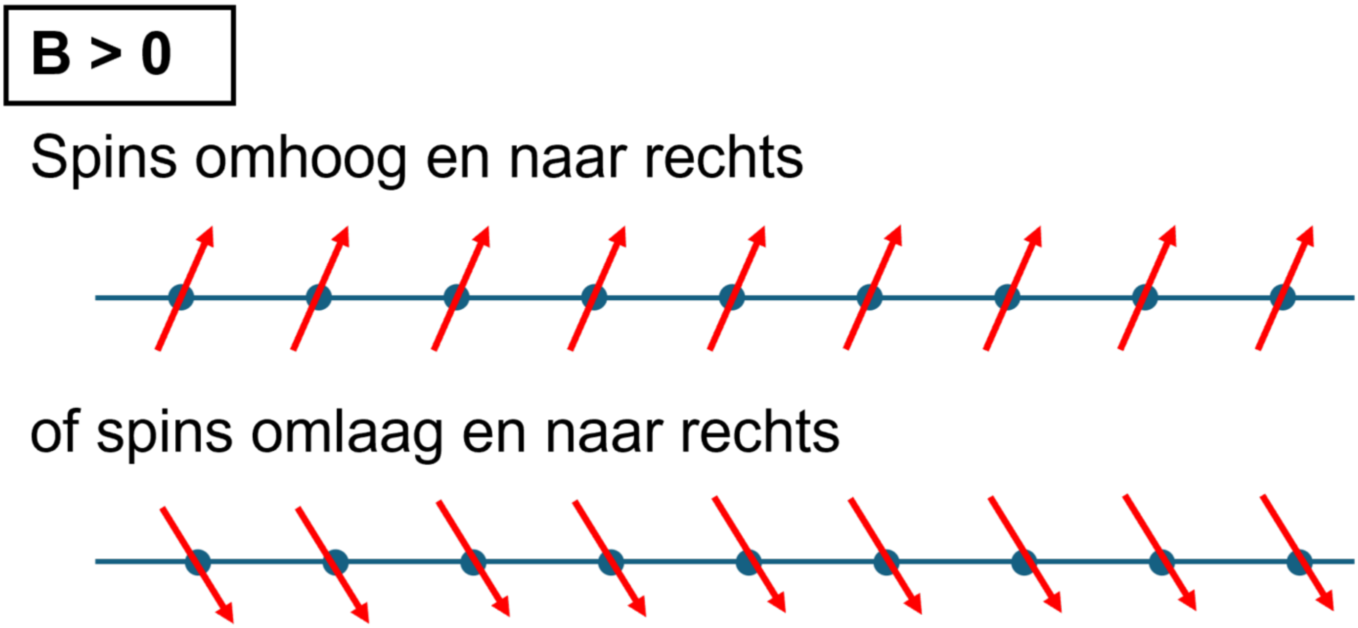
Afbeelding 4. De spin-en veldrichting. De spins wijzen omhoog of omlaag. Het

transversale veld wijst loodrecht op de spinrichting. We kiezen het transversale veld naar rechts.

Als het transversale veld heel sterk is, duwt het de spins helemaal naar rechts. Zo ontstaat de volgende toestand van het systeem die wordt weergegeven in afbeelding 5. Hoewel deze toestand lijkt op de toestand waar alle spins omhoog of omlaag staan, is dit een andere *fase* van het systeem. In plaats van dat de spins omhoog of omlaag staan door een natuurlijke interactie tussen de spins onderling, staan ze nu naar één specifieke kant door het toepassen van een extern magnetisch veld.

Afbeelding 5. Een sterk veld. Een sterk transversaal veld zorgt ervoor dat de spins allemaal naar rechts gericht raken, in de richting van het transversale veld.

Voor een zwak transversaal veld, is er een spanning tussen aan de ene kant de spins die in dezelfde richting omhoog of omlaag willen staan, en aan de andere kant de spins die naar rechts worden geduwd door het transversale veld. De toestand met de laagste energie wordt dan zoiets als die in afbeelding 6, waar de spins nog steeds omhoog of omlaag staan, maar een beetje naar rechts kantelen.



Afbeelding 6. Een zwak veld. Een zwak transversaal veld zorgt ervoor dat de spins naar rechts kantelen maar ook nog gedeeltelijk omhoog of omlaag wijzen.

Nu ik het Isingmodel in een transversaal veld heb beschreven, is het tijd om terug te gaan naar dualiteiten. Het beschreven Isingmodel is zogezegd *zelf-duaal*. Misschien heb je intussen al een idee wat dit kan betekenen. Als een model *duaal* is aan een ander model, kan het wiskundig omgeschreven worden tot een ander model. Als een model *zelf-duaal* is, kan het omgeschreven worden tot… zichzelf! Nu zal je misschien denken: natuurlijk, alles kan worden omgeschreven tot zichzelf, want alles is gelijk aan zichzelf. Het leuke aan de zelf-dualiteit van het Isingmodel in een transversaal veld met sterkte **B**, is echter dat het model omgeschreven kan worden tot een Isingmodel in een transversaal veld met sterkte **1/B**, dus tot een *ander* Ising model met transversaal veld.[2] Als het veld in het Isingmodel heel groot is, zoals in afbeelding 5, kun je het model dus omschrijven naar een Isingmodel met een heel klein veld, dat vrijwel sterke 0 heeft, zoals in afbeelding 3 – natuurkundig gezien een heel andere situatie!

Dit inzicht werd in 1941 verkregen door de Nederlandse natuurkundige Hendrik Kramers en de Zwitserse natuurkundige Gregory Wannier. Toentertijd bestonden er nog geen computers en was het moeilijk om eigenschappen van modellen als het Isingmodel te berekenen. De zelf-dualiteit van het Isingmodel leerde de natuurkundigen iets over de overgang tussen de twee fases weergegeven in afbeeldingen 4 en 5.

Kramers en Wannier namen aan dat de faseovergang plaatsvindt voor een of andere waarde **B’** van het transversale veld. Nu wisten zij via de zelf-dualiteit dat zij het model voor die waarde **B’** ook konden beschrijven als een Isingmodel met transversaal veld **1/B’**. Met andere woorden, als de faseovergang op waarde **B’** plaatsvindt, moet deze ook op waarde **1/B’** plaatsvinden. Dan moet de faseovergang dus plaatsvinden wanneer:

B’ = 1/B’,

oftewel[3] wanneer **B’=1**. Dit is een krachtig resultaat! Zonder enige berekening te doen, kan via de zelf-dualiteit gevonden worden voor welke waarde van het magneetveld **B** een faseovergang plaatsvindt, een gegeven dat normaal heel veel rekenkracht vereist. Op deze manier is de tweevoudigheid, het hebben van twee aarden, of gewoonweg de *dualiteit* van een model of systeem, een interessante en nuttige eigenschap, die ons kan helpen om natuurkundige systemen beter te begrijpen en beschrijven.

---

[1] Ons onbegrip over deze ogenschijnlijke dualiteit relateert direct aan het *meetprobleem* in de quantummechanica: hoewel deeltjes zich in experimenten als zowel golven als puntdeeltjes lijken te gedragen, weten we niet zeker of deeltjes ooit echt puntdeeltjes zijn. Steeds meer natuurkundigen denken dat in werkelijkheid alles in de natuur, inclusief grote systemen zoals jij en ik *golven* zijn!

[2] Merk op dat we de sterkte van het veld voor het gemak eenheidsloos beschrijven. Als we de dualiteit netjes zouden omschrijven zouden we vinden dat een Isingmodel met veldsterkte $B \; A/m$ (Ampère/meter) omgeschreven zou kunnen worden tot een Isingmodel met veldsterkte $c/B \; A/m$, met c een bepaalde constante, en dus niet met veldsterkte $(B \; A/m)^{-1} = 1/B \; m/A$.

[3] Of, als we niet eenheidsloos werken (zie de vorige voetnoot), wanneer $B’= \sqrt{c} \; A/m$.