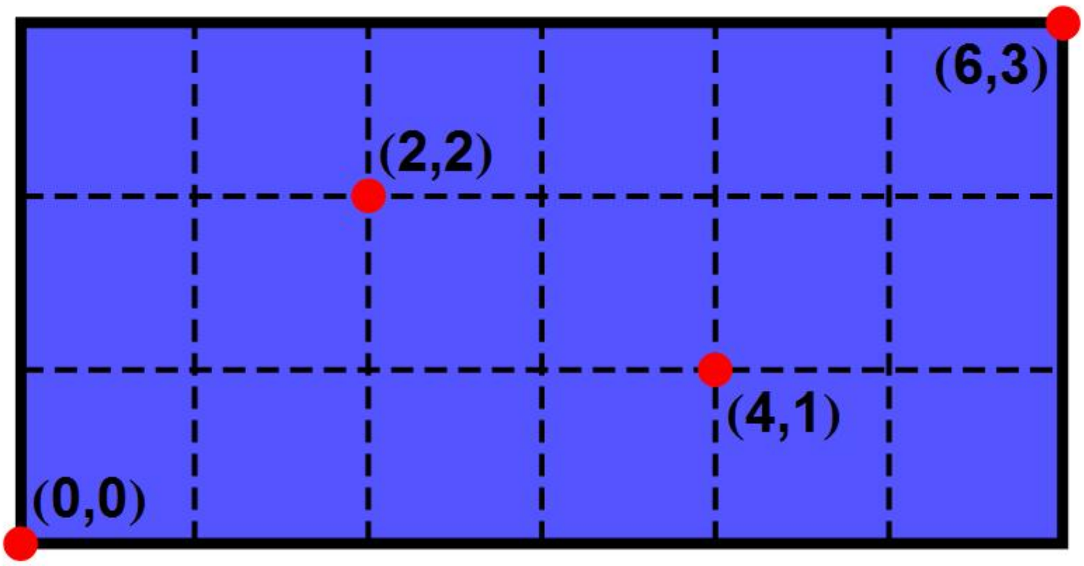
# Dimensies

**De wereld om ons heen is driedimensionaal. Wat wil dat precies zeggen? Grofweg houdt dat het volgende in. We moeten in drie verschillende richtingen kunnen bewegen (van links naar rechts, van voor naar achter en van boven naar beneden) om van een willekeurig punt A naar een willekeurig punt B te gaan. Iets anders geformuleerd: we hebben drie verschillende *coördinaten* nodig om elk punt in onze wereld te beschrijven.**

Om precies aan te geven waar ik mij in mijn huis bevind, kan ik bijvoorbeeld zeggen dat ik drie meter achter de voordeur sta, twee meter van de linkermuur, op een trapje dat een meter hoog is. Mijn coördinaten in dit (nogal willekeurige) coördinatenstelsel zijn dan dus (3m, 2m, 1m) – of als we de eenheid “meters” achterwege laten: (3, 2, 1). Om te beschrijven waar de top van de Mount Everest zich bevindt, kunnen we zeggen dat dat op ongeveer 28 graden noorderbreedte, 87 graden oosterlengte, en 9 kilometer hoogte is. Als we de eenheden weer achterwege laten kunnen we die coördinaten schrijven als (28,87,9).

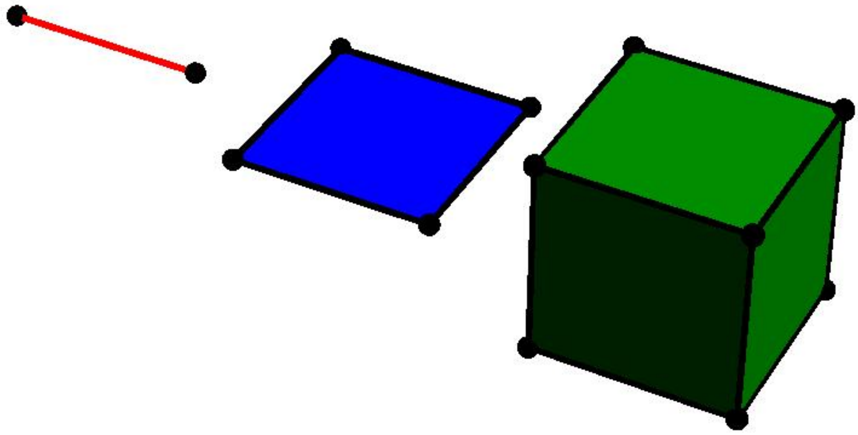



**Afbeelding 1. CoördinatenEen tweedimensionaal coördinatenstelsel. Van de vier rode punten hebben we de**

**coördinaten aangegeven. (Er zijn natuurlijk ook punten met coördinaten die geen gehele getallen zijn; die punten liggen tussen de gestippelde lijnen.)**

Er is hier sprake van twee verschillende coördinatenstelsels: één waarin we posities meten in een rechthoekig coördinatensysteem ten opzichte van de voordeur, de linkermuur en de grond; één waarin we posities meten in een bolvormig coördinatensysteem ten opzichte van de evenaar, de nulmeridiaan door Greenwich en het aardoppervlak. In beide gevallen moeten we echter *drie* afstanden aangeven, en hebben we dus *drie* coördinaten nodig. De eerste coördinaat beperkt het aantal mogelijke punten tot een vlak (alle punten die drie meter achter de voordeur liggen), de tweede coördinaat tot een lijn in dat vlak (alle punten die drie meter achter de voordeur en twee meter vanaf de linkermuur liggen), en de derde coördinaat geeft tenslotte aan welk punt op de lijn (een meter boven de vloer) we bedoelen. We zien uit deze redenering dat we niet met minder dan drie coördinaten af kunnen, en daarom zeggen we dat onze wereld *driedimensionaal* is.

We kunnen ons bijvoorbeeld ook een tweedimensionale ruimte voorstellen. In zo’n ruimte zijn er maar twee mogelijke richtingen: denk aan het oppervlak van een vel papier, of het oppervlak van een bal. Een mier die over een dergelijk oppervlak loopt, zal alleen maar voor- en achteruit en naar links en rechts kunnen. Effectief heeft de mier dus maar twee coördinaten nodig om zijn positie te beschrijven – zijn wereld is in goede benadering tweedimensionaal. (Dit verandert natuurlijk als het blijkt te gaan om een vliegende mier, die ook in de derde dimensie kan bewegen.) Evenzo ervaart een mier die over een dun takje loopt een ruimte die in goede benadering eendimensionaal is: hij kan alleen maar voor- en achteruit lopen, en heeft aan één coördinaat voldoende om zijn positie op het takje te beschrijven.



**Afbeelding 2. “Kubussen” in 1, 2 en 3 dimensies.**

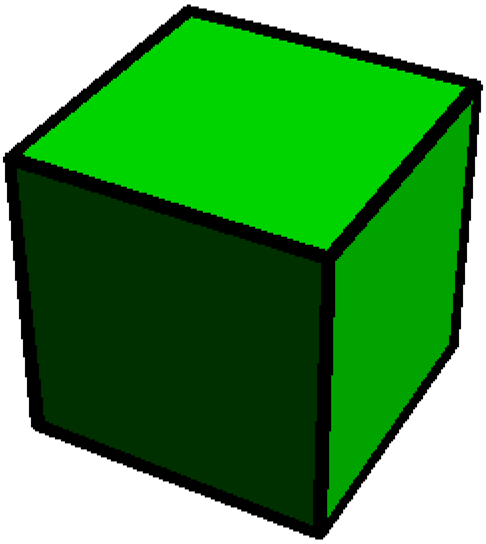
Hoe zit het met ruimtes met *meer* dan drie dimensies? Die kunnen we ons een stuk lastiger voorstellen, om de simpele reden dat onze eigen wereld driedimensionaal is. We hebben in het dagelijks leven geen ervaring met vier- of hogerdimensionale ruimtes, en onze hersenen zijn dus niet goed in staat om zich zo’n wereld voor te stellen. Dat neemt niet weg dat we zo’n hogerdimensionale ruimte prima kunnen *beschrijven*: elk punt in zo’n ruimte kunnen we eenvoudigweg weergeven door een rijtje van vier of meer coördinaten.

Ook het rekenen in hogerdimensionale ruimtes is geen enkel probleem. Een voorbeeld: hoeveel hoekpunten heeft een vierdimensionale “hyperkubus”? In afbeelding 2 zien we een driedimensionale kubus, een tweedimensionale “kubus” (een vierkant) en een eendimensionale “kubus” (een lijnstuk). We zien dat deze afbeeldingen respectievelijk 8, 4 en 2 hoekpunten hebben. Het aantal hoekpunten wordt met het verhogen van de dimensie steeds tweemaal zo groot, dus we kunnen direct al gokken dat een vierdimensionale hyperkubus 16 hoekpunten zal hebben. We kunnen dit ook precies tellen door de vierdimensionale coördinaten van de hoekpunten van een voorbeeld van zo’n hyperkubus op te schrijven:

(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1),
(0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1),
(1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1),
(1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1).

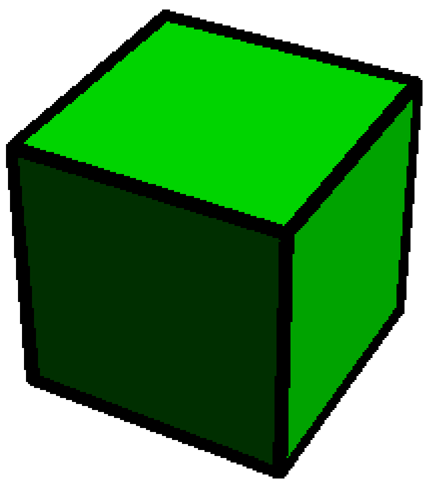
We zien dat er inderdaad 16 hoekpunten zijn. Dit is maar een eenvoudig voorbeeld van een vierdimensionale “berekening”; met wat meer wiskunde kunnen we ook het hypervolume van een vierdimensionale bol, het aantal snijpunten van twee gekromde vlakken in vier dimensies, en nog allerlei andere meetkundige zaken berekenen.

Zijn dergelijke hogerdimensionale ruimtes alleen mysterieuze wiskundige constructies, of hebben we ze ook daadwerkelijk nodig om de natuur te beschrijven? Aangezien we in het dagelijks leven nooit meerdimensionale ruimtes tegenkomen is het antwoord misschien verbazend, maar hogerdimensionale ruimtes zijn een essentieel hulpmiddel voor de natuurkundige. Het bekendste voorbeeld is de relativiteitstheorie van Albert Einstein: Einstein liet zien dat we ruimte, tijd en zwaartekracht veel beter kunnen begrijpen als we de tijd zien als een vierde dimensie, die op gelijke voet staat met onze drie ruimtedimensies. Veel meer details hierover zijn te vinden in het dossier over de relativiteitstheorie dat binnenkort op deze website verschijnt.



**Afbeelding 3. Rotaties van een kubus.Als we alleen de positie van het middelpunt van een kubus vastleggen, kunnen we de kubus nog allerlei oriëntaties geven.**

Ook de toestand van veel natuurkundige systemen valt goed te beschrijven met meer dan drie coördinaten. We kunnen zo'n toestand daarmee zien als een punt in een hogerdimensionale ruimte. Denk aan een kubus die zich ergens in een kamer bevindt. Als we van die kubus alleen de drie coördinaten van het middelpunt beschrijven, weten we nog niet precies in welke oriëntatie de kubus zich bevindt – we kunnen de kubus dan nog op allerlei manieren om zijn middelpunt draaien, zonder dat de positie van dat middelpunt zelf verandert – zie de animatie in afbeelding 3. We kunnen de beschrijving verbeteren door ook de positie van een van de hoekpunten te beschrijven. Dat hoekpunt bevindt zich ergens in een bolvormige "schil" rond het middelpunt; we hebben om die positie te beschrijven dus genoeg aan twee extra (bol)coördinaten. De hele positie van de kubus ligt daarmee echter nog steeds niet vast – daarvoor moeten we ook nog de positie van een derde hoekpunt beschrijven. Dat hoekpunt kan nog draaien om de as door het middelpunt van de kubus en het al vastgelegde hoekpunt – zie de animatie in afbeelding 4. Om het tweede hoekpunt vast te leggen, hebben we dus nog één laatste coördinaat nodig. In totaal hebben we daarmee voor het beschrijven van de positie en oriëntatie van de kubus zes coördinaten nodig – de "toestandsruimte" van de kubus is een abstracte zesdimensionale ruimte. In het dossier over faseruimtes wordt verder beschreven waarom het nuttig kan zijn om met dergelijke hogerdimensionale toestandruimtes te werken.



**Afbeelding 4. Rotaties van een kubusAls we van de kubus ook de positie van een hoekpunt vastleggen (hier het hoekpunt rechtsonder) kan de kubus nog om één as draaien.**

Laten we nog twee slotopmerkingen maken over punten die vaak tot verwarring leiden. Allereerst: zoals we hebben gezien hoeven dimensies niet altijd “plat” te zijn. Het oppervlak van een vel papier is plat, maar het oppervlak van een bal is gekromd. Een tweedimensionale ruimte kan dus gekromd zijn, en hetzelfde geldt (hoewel we ons dit veel moeilijker kunnen voorstellen) voor drie- en hogerdimensionale ruimtes. Ook de zesdimensionale ruimte die de positie en oriëntatie van de kubus beschrijft heeft bijvoorbeeld een aantal gekromde dimensies: de dimensies die de rotatie van de kubus om zijn middelpunt beschrijven.

Ten tweede: de kromming van een tweedimensionale ruimte kunnen we ons goed voorstellen, omdat we die kromming in onze derde dimensie kunnen uitbeelden. De kromming van een driedimensionale ruimte kunnen we ons niet goed voorstellen, omdat we tenminste een vierde dimensie nodig zouden hebben om die kromming uit te beelden. Een belangrijk misverstand is echter dat er altijd extra dimensies *nodig zijn* om andere dimensies te kunnen krommen. De zesdimensionale ruimte die de positie van de kubus beschrijft is een goed voorbeeld: deze zes dimensies zijn gedeeltelijk gekromd, maar er is geen zevende of hogere dimensie nodig om deze kromming in te laten plaatsvinden. Ruimtes kunnen dus ook “intrinsiek” gekromd zijn, zonder dat daar extra dimensies voor nodig zijn.