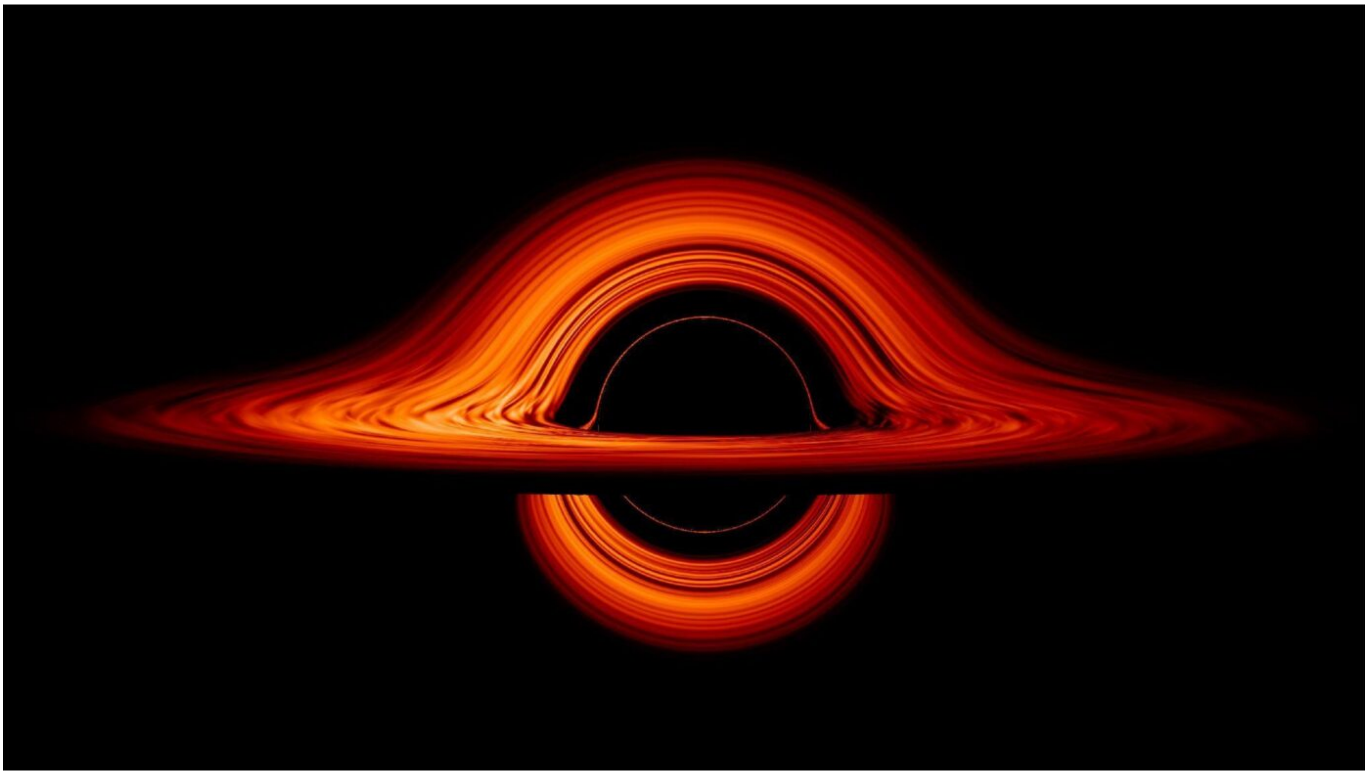
Dimensie-analyse en zwarte gaten

Als er één trucje is waarvan ik denk dat het op de middelbare school meer aandacht had verdiend, dan zou dat waarschijnlijk dimensie-analyse zijn. Met dimensie-analyse kan je op elk punt in een natuurkundige berekening checken of je geen grote fouten hebt gemaakt, en zelfs de vorm van een antwoord op een vraag vaak gokken. Het is een truc die voor middelbare scholieren handig is, maar ook voor professionele natuurkundigen is het vaak de eerste strategie waar ze naar grijpen om een beeld te krijgen van het probleem waar ze aan werken. Zo kan je bijvoorbeeld de vorm van de wetten van Kepler, Einsteins beroemde $E = mc^2$ en de grootte van de horizon van een zwart gat 'gokken', zonder integraalrekening of algemene relativiteitstheorie, maar gewoon met wat simpele algebra.



Afbeelding 1: Een zwart gat. Artistieke weergave van een zwart gat. Afbeelding: NASA's

Goddard Space Flight Center/Jeremy Schnittman.

Dimensie-analyse gaat over het vergelijken van grootheden en hun eenheden. Ter herinnering: een *grootheid* is iets wat je meet: bijvoorbeeld een afstand, een tijdsduur, een kracht, een massa, een spanning of een stroomsterkte. Een *eenheid* is een maatstaf waarin je die grootheid meet: bijvoorbeeld een meter voor afstand, een kilogram voor massa of een seconde voor tijd. Het principe achter dimensie-analyse is dat, als je een grootheid A met een andere grootheid B wil vergelijken, de eenheden waarin we die twee grootheden meten ook hetzelfde moeten zijn. Zo slaat het bijvoorbeeld nergens op om te zeggen: 1 kilogram = 5 meter.

Op deze manier kan je controleren of een vergelijking hout snijdt. Neem bijvoorbeeld de beroemde formule $E = mc^2$ van Einstein. Als je de formule kent voor de kinetische energie van een object, $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ (m is de massa en v is de snelheid van het object), kun je daarmee eerst afleiden welke eenheid energie heeft. Daarvoor vind je dan:

$$[E_{kin}] = [\frac{1}{2}mv^2] = [m]\cdot [v]^2 = \frac{[m][l]^2}{[t]^2},$$

waarin de blokhaken notatie zijn voor de eenheid van datgene wat in die blokhaken staat. Zo drukt het bovenstaande de eenheid voor energie uit in termen van de eenheden voor massa (m), lengte (l) en tijd (t). Als je nu voor massa de kilogram kiest, voor lengte de meter en voor tijd de seconde, dan definieert het bovenstaande de Joule. (Let op: zowel voor de grootheid ‘massa’ als voor de eenheid ‘meter’ gebruiken natuurkundigen meestal de letter m – soms wat verwarrend, maar als je begrijpt of een bepaalde uitdrukking over *grootheden* of over *eenheden* gaat kun je ze altijd uit elkaar houden.) Voor $E = mc^2$ zien we nu vrij simpel dat de eenheden in ieder geval kloppen, aangezien c, de lichtsnelheid, zoals de naam al zegt ook eenheden van snelheid heeft.

Vaak kan je ook de vorm van een vergelijking op deze manier gokken. $E = mc^2$ geeft uitdrukking aan het idee dat de energie van een object in rust evenredig is met zijn massa. Alleen hebben massa en energie niet dezelfde eenheid, dus moet je de massa nog vermenigvuldigen met het enige wat het de juiste eenheid geeft: een snelheid in het kwadraat. Aangezien elke snelheid die je hiervoor kiest arbitrair is (de snelheid van het object zelf kan niet, dat is immers in rust en staat dus stil), kan je eigenlijk alleen maar een snelheid kiezen die een natuurconstante is, namelijk die snelheid die de snelheidslimiet voor het universum vormt – de lichtsnelheid. Hieruit kan je gokken dat je vergelijking de vorm $E = \# mc^2$ moet hebben, waarbij # een nog in te vullen, dimensieloos, getal is, wat meestal van de ordegrootte 1 is (en in dit geval na een precieze berekening exact 1 blijkt te zijn). Je ziet ook direct dat het antwoord geen andere vorm kan hebben: elke andere macht voor zowel de massa als de snelheid geeft de verkeerde eenheid. Natuurlijk is dit geen bewijs voor de natuurkundige juistheid van de vergelijking, maar het geeft wel een goede eerste gok als je naar een dergelijk verband op zoek bent.

De ontsnappingssnelheid

Laten we voor een volgend voorbeeld gebruikmaken van de tweede wet van Newton:

$$F = ma,$$

waar F een kracht is, m de massa waarop die kracht werkt, en a de versnelling van het object. Verder gebruiken we Newtons universele gravitatiewet:

$$F_{grav} = G \frac{m_1\cdot m_2}{r^2},$$

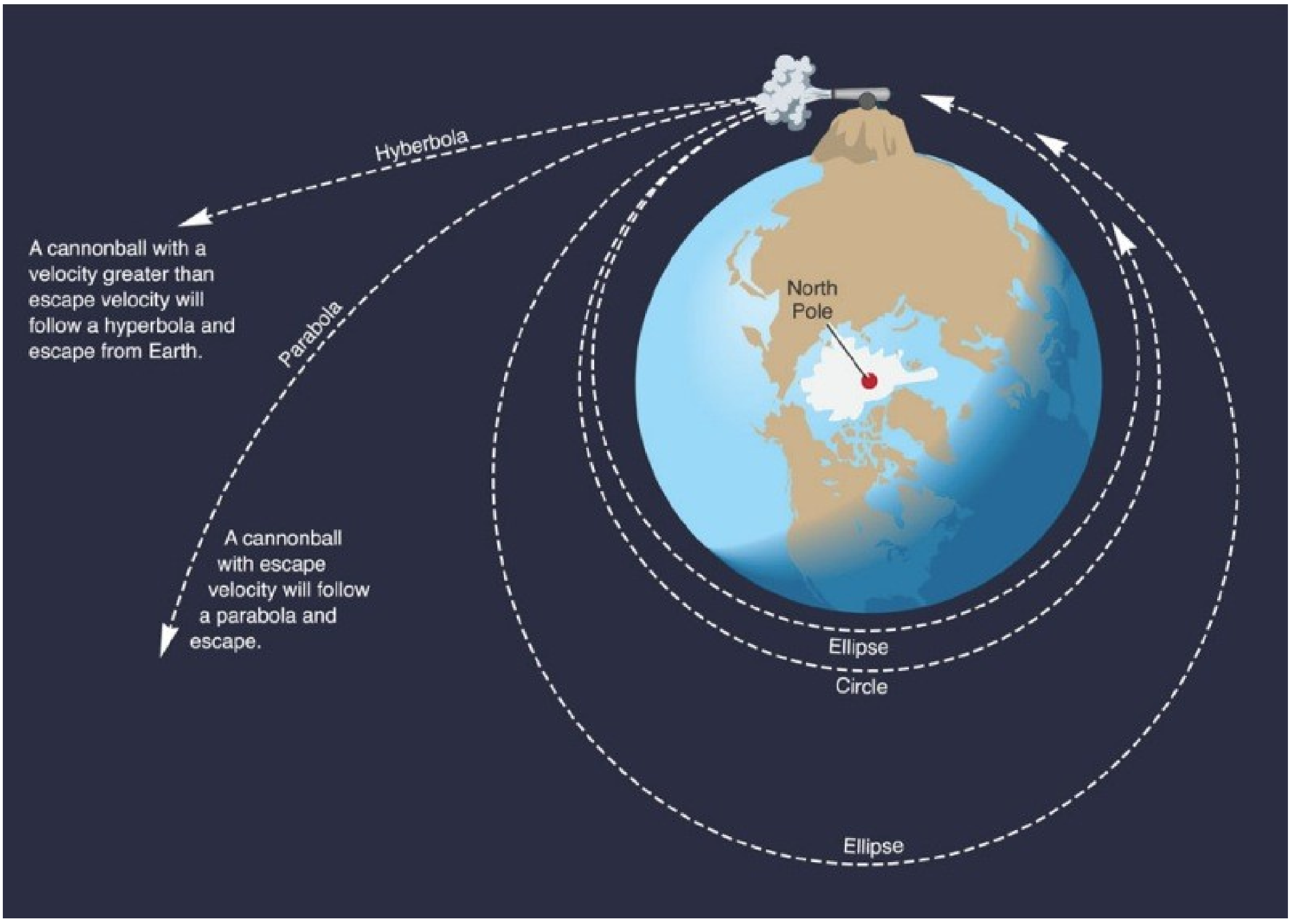
waar F_{grav} de gravitationele aantrekkingskracht tussen twee objecten is, m_1 en m_2 de massa's van die twee objecten zijn, en r de afstand tussen de twee objecten is. G is Newtons gravitatieconstante, die aangeeft hoe sterk zwaartekracht is. Laten we eerst dimensie-analyse gebruiken om vanuit Newtons tweede wet de eenheid voor *kracht* te bepalen. Bedenk hierbij dat een versnelling aangeeft hoeveel groter (of kleiner) de snelheid van een object per tijdseenheid wordt. De eenheden worden dan:

$$[F] = [m] \cdot \frac{[v]}{[t]} = \frac{[m]\cdot [l]}{[t]^2}.$$

Hierbij opnieuw: als je voor de massa-eenheid de kilogram, voor de lengte-eenheid de meter en voor de tijdseenheid de seconde gebruikt, definieert het bovenstaande de krachteenheid die we ook wel de Newton (N) noemen. Nu kunnen we vanuit de universele gravitatiewet ook achterhalen wat de eenheden zijn voor G, Newtons gravitatieconstante. We herschrijven de wet eerst, en bepalen dan de eenheid:

$$[G] = [\frac{F_{grav} r^2}{m_1 \cdot m_2}] = \frac{[m][l]^3}{[t]^2[m]^2} =$$

\frac{[l]^3}{[t]^2[m]} \).



Afbeelding 2. De ontsnappingssnelheid. Deze afbeelding toont de baan van een object wanneer het met een kleinere, even grote of grotere snelheid dan de ontsnappingssnelheid wordt afgevuurd vanaf de aarde. Afbeelding via de Universiteit van Virginia.

Stel nu dat we de *ontsnappingssnelheid* van een bepaald hemellichaam, bijvoorbeeld de aarde, willen weten. Met andere woorden: we willen weten hoe snel we een object vanaf de aarde moeten afvuren als we willen dat het aan de zwaartekracht van de aarde ontsnapt, en niet weer terug naar beneden valt (zie afbeelding 2). Gebruikmakend van de bovenstaande vergelijkingen is de exacte berekening niet heel lastig, maar laten we onze dimensie-analysetruc toepassen. We weten dat de snelheid waarmee we de bal moeten afvuren zal samenhangen met hoe sterk zwaartekracht is, dus we kunnen verwachten dat Newtons zwaartekrachtsconstante \(G \) in ieder geval in de vergelijking zal staan. Verder is er de massa van het object waarvandaan we het object afvuren, zeg \(M \), en de straal van dat object, zeg \(R \). (Je weet misschien ook dat objecten met verschillende massa's even snel vallen in een vacuüm, dus van de massa van het weggeschoten object zelf zal de benodigde snelheid niet afhangen.) Hoe kunnen we deze grootheden combineren zodat we een snelheid vinden? Als we G vermenigvuldigen met de genoemde massa, krijgen we $[GM] = \frac{[l]^3}{[t]^2}$, en als we vervolgens delen door de straal krijgen we $[\frac{GM}{R}] = \frac{[l]^2}{[t]^2} = [v]^2$. Nu hebben we dus met wat knutselen eenheden van een snelheid in het kwadraat gevonden, dus we gokken de volgende formule voor de ontsnappingssnelheid (‘escape velocity’), zeg v_e:

$$v_e^2 = \# \frac{GM}{R},$$

opnieuw met # een bepaalde constante, waarschijnlijk van ordegrootte 1. Het is duidelijk dat, naarmate de straal R van het hemellichaam kleiner wordt, je meer snelheid nodig hebt om van het object te ontsnappen – en dat blijkt ook uit de formule. Nu stellen we een interessante vraag: wat gebeurt er als het weggeschoten object de snelheid van het licht heeft? Hoe klein moet het hemellichaam van waar je het wil laten ontsnappen dan zijn, voordat zelfs de lichtsnelheid niet genoeg is om te ontsnappen?

Zwarte gaten

Om deze vraag te beantwoorden, schrijven we de formule om, en vullen we de lichtsnelheid c in voor de ontsnappingssnelheid. Laten we de resulterende straal de gravitatiestraal R_g van een object noemen:

$$R_g = \# \frac{GM}{c^2}.$$

Deze straal wordt in de natuurkunde, als je de juiste waarde voor # invult, ook wel de *Schwarzschildstraal* genoemd. Als je nu in onze uitdrukking bijvoorbeeld de massa van de aarde invult, vind je dat de gravitatiestraal van de aarde grofweg de grootte van een knikker of golfbal heeft.

De formule hierboven zegt dus dat objecten met een straal kleiner dan R_g van een afstandje onzichtbaar zijn, omdat het licht niet kan ontsnappen. Die beschrijving doet al erg denken aan een zwart gat, maar zwarte gaten zijn een fenomeen dat zich pas voordoet in de algemene relativiteitstheorie van Einstein; tot dusver hebben we alleen maar de wetten van Newton en wat dimensie-analyse gebruikt.

Je zou in de wereld van Newtons klassieke mechanica dan ook gewoon naar een dergelijk object toe kunnen reizen, landen, foto's maken, en weer naar huis kunnen gaan, alleen zou je wel sneller dan het licht moeten kunnen reizen hiervoor. Dankzij Einsteins wetten weten we echter dat licht en al het andere terugvalt naar het zware hemellichaam, dat er geen oppervlak achter de horizon is waar je zou kunnen landen, omdat alles in een zwart gat samengetrokken wordt tot een punt in het midden, de *singulariteit*, en dat de snelheid van het licht een universele snelheidslimiet is in het universum. De bovenstaande relatie gaf echter ook vóór Einstein al een opvallende relatie tussen licht en zwaartekracht, en toen Einstein beweerde dat de snelheid van het licht een fundamentele natuurconstante was en dat zwaartekracht veroorzaakt wordt door de kromming van ruimte en tijd, werd al snel duidelijk dat deze relatie van groot belang is.

Wil je meer weten over dimensie-analyse? Voor eenzelfde soort discussie en een afleiding van de wetten van Kepler met dimensionele analyse, kan je het onderstaande filmpje bekijken:

Verder kan je de onderstaande interessante blogpost lezen, waar ook dit artikel op gebaseerd is, en waar naast wat historische context ook met behulp van dimensionele analyse een 'gok' voor een correctie op Newtons universele gravitatiewet wordt gegeven. Daarmee wordt vervolgens een afwijking in de baan van Mercurius gemodelleerd – een afwijking ten opzichte van wat je uit de wetten van Newton zou verwachten. Die afwijking was ook de eerste grote 'smoking gun' voor de algemene relativiteitstheorie. De waargenomen, en tot dan toe onbegrepen afwijking in de baan van de planeet Mercurius werd zo (voor 99% – de overige 1% lag aan het feit dat de zon geen perfecte bol is) verklaard.

Black Holes, Mercury, and Einstein: The Role of Dimensional Analysis