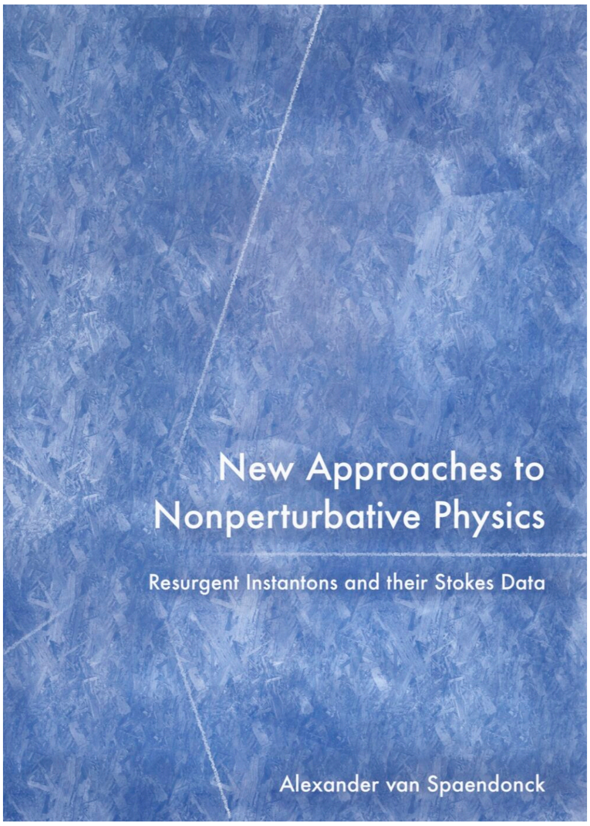
De wondere wiskunde van de quantumfysica

QU-redacteur Alexander van Spaendonck verdedigt op 4 oktober zijn proefschrift *New Approaches to Nonperturbative Physics*. In dit artikel geeft hij een korte samenvatting van het onderzoek waarmee hij zich de afgelopen vier jaar heeft beziggehouden, over de wiskunde achter de quantummechanica en de snaartheorie.



Afbeelding 1. Alexanders proefschrift. Wie het proefschrift zelf wil inzien kan onderaan dit artikel een link vinden.

Natuurkunde is moeilijk. Die stelling kan vrij letterlijk worden genomen, in de zin dat het vinden van exacte oplossingen voor veel problemen in de natuurkunde buitengewoon lastig is. Gelukkig hebben natuurkundigen verschillende methoden ontwikkeld die het mogelijk maken om de oplossingen van natuurkundige problemen met grote nauwkeurigheid te *benaderen*. Een van de meest populaire methodes om dit te doen is *storingsrekening*.

In storingsrekening – ook wel *perturbatietheorie* – beschouwen we het moeilijke probleem dat we proberen op te lossen als een verstoring boven op een gemakkelijker probleem, waarvan we de oplossing wél kennen. Schematisch ziet dit er als volgt uit:

$$(\text{moeilijk probleem})\ = \ (\text{makkelijk probleem}) \ + \ g \times \, (\text{verstoring}).$$

De variabele g staat bekend als de *koppeling*, omdat deze de verstoring koppelt aan het gemakkelijke probleem. Storingsrekening vervangt het oplossen van één enkel moeilijk probleem door het oplossen van een oneindig aantal eenvoudige problemen: we vinden dat de oplossing van ons moeilijke probleem de vorm aanneemt van een *machtreeks*

$$\varphi(g) = \varphi_0 + \varphi_1 g+\varphi_2 g^2+\varphi_3 g^3+\varphi_4 g^4 \ldots \,,$$

waarbij elke coëfficiënt φ_n de oplossing is van een van deze eenvoudige problemen. Je zou je zorgen kunnen maken om het feit dat het inruilen van één enkel moeilijk probleem voor een oneindig aantal oplosbare problemen geen vooruitgang lijkt. Wat storingsrekening echter zo effectief maakt, is dat elke volgende bijdrage in de reeks alsmaar kleiner zal zijn door de extra (kleine) factor g, in elk geval wanneer de koppeling g heel klein is. Hierdoor kunnen we op een gegeven moment verdere bijdragen van de reeks negeren, aangezien hun relatieve grootte verwaarloosbaar klein zal zijn. We hoeven dus meestal maar een eindig aantal coëfficiënten φ_n te berekenen om een voldoende nauwkeurige oplossing voor ons moeilijke probleem te vinden. Het ‘meestal’ is belangrijk in die zin, want we zullen later zien dat er ook (heel interessante) uitzonderingen op het bovenstaande zijn!

Een vijfdegraadsvergelijking

Om storingsrekening te illustreren bekijken we een voorbeeld[1] van zo een ‘moeilijk’ probleem: het vinden de positieve reële oplossing van de vijfdegraads vergelijking

$$ x^5 +x -1 = 0 $$.

Voor kwadratische vergelijkingen kennen we de bekende *abc-formule*, maar in het geval van vijfdegraadsvergelijkingen zoals die hierboven bestaat er geen kant-en-klaar algoritme om exacte oplossingen te vinden. Dit is waar storingsrekening ons te hulp schiet: de bovenstaande vergelijking lijkt op de vergelijking

$$ x^5 -1 = 0 $$

waar we de term x hebben weggehaald. Het oplossen van die vergelijking is een eenvoudig probleem, aangezien een positieve reële oplossing voor deze vergelijking makkelijk te vinden is: $x = 1$ voldoet aan de vergelijking want $1^5 – 1 = 1 – 1 = 0$. Storingsrekening vertelt ons nu dat we de oplossing van ons moeilijke probleem kunnen vinden door de lineaire term terug te zetten in de vergelijking, maar ditmaal met een koppeling g:

$$ x^5 +g x -1 = 0 $$.

Vervolgens nemen we aan dat de oplossing voor x te schrijven valt als een machtreeks in de koppeling:

$$ x(g) = 1 + x_1 g+x_2 g^2 + x_3 g^3 + \mathcal{O}(g^4)$$

Hier geeft $\mathcal{O}(g^4)$ aan dat er nog meer bijdragen volgen die schalen met machten van g^4 of hoger. De eerste coëfficiënt 1 die constant is – dat wil zeggen: die niet met g schaalt en dus als enige overblijft als we $g=0$ kiezen – is de oplossing van ons simpele probleem $x^5 -1 = 0$. Als we deze aanname – of *ansatz* – terug in de vergelijking $x^5 +g x -1 = 0$ stoppen, dan vinden we de volgende vergelijking, die we voor het gemak naar de machten van g die voorkomen geordend hebben:

$$ (5x_1+1)g +(5x_2+10x_1^2+ x_1)g^2 + (5x_3^5+20x_1x_2+x_2+10x_1^3)g^3+ \mathcal{O}(g^4) = 0 $$.

Ook hier hebben we de termen met vierde- en hogere machten van g weer weggelaten. Ongeacht de waarde van g, moet nu de *hele* linkerzijde van deze vergelijking verdwijnen, wat betekent dat we de volgende reeks vergelijkingen willen oplossen:

$$5x_1 + 1 = 0$$
$$5x_2+10x_1^2+ x_1= 0$$
$$5x_3^5+20x_1x_2+x_2+10x_1^3 = 0$$
$$\text{etc.}$$

In tegenstelling tot de oorspronkelijke vijfdegraadsvergelijking zijn deze vergelijkingen *wel* op te lossen: de eerste bepaalt x_1; dat resultaat kunnen we vervolgens in de tweede vergelijking stoppen om x_2 te bepalen, die beide resultaten kunnen we vervolgens in de derde vergelijking stoppen om x_3 te bepalen, enzovoort. Dit proces kunnen we eindeloos voortzetten; het leidt na het berekenen van de eerste zes coëfficiënten (probeer het vooral ook zelf!) tot

$$x(g) = 1-\frac{1}{5} g - \frac{1}{25} g^2-\frac{1}{125} g^3 + \frac{21}{15625}g^5 +\frac{78}{78125}g^6+ \mathcal{O}(g^7).$$

Nu zijn we uiteindelijk geïnteresseerd in de oplossing van ons moeilijke probleem, namelijk het geval waarin $g=1$. Door in de bovenstaande uitdrukking $g=1$ in te vullen en de eerste zes nieuwe bijdragen bij de oorspronkelijke oplossing ‘1’ op te tellen, vinden we de volgende benadering van het antwoord:

$$x(1) \approx 0{,}7543.$$

Dit komt al verassend dicht bij het exacte antwoord dat (afgerond op vier decimalen) 0,7549 is. Door meer bijdragen x_n mee te nemen, wordt het resultaat steeds preciezer en convergeert onze benadering langzaam maar zeker naar de exact waarde.

Tekortkomingen van storingsrekening

Storingsrekening is een van de meest gebruikte technieken in de quantummechanica, de quantumveldentheorie en de snaartheorie. De techniek heeft geleid tot een van de meest nauwkeurige theoretische voorspellingen van de wetenschap: die van de waarde van het magnetisch moment van het elektron, die tot $1{,}3$ delen in 10^{13} overeenkomt met experimentele resultaten. Ondanks alle successen kent storingsrekening ook enkele gebreken. Daarvan zijn er twee in het bijzonder relevant: allereerst blijkt dat in veel natuurkundige theorieën de machtreeksen die we verkrijgen *divergent* zijn. Dit betekent dat de individuele bijdragen $x_n g^n$ aan de machtreeks op een gegeven moment weer beginnen te groeien, ongeacht hoe klein we de koppeling g maken, wat suggereert dat we ze niet langer kunnen negeren. Een tweede probleem met storingsrekening is dat er natuurkundige verschijnselen bestaan die *niet-perturbatief* zijn, wat betekent dat ze beschreven worden door wiskundige functies die niet uitgedrukt kunnen worden in termen van een machtreeks. Enkele voorbeelden van zulke niet-perturbatieve fenomenen zijn solitonen, quantumtunneling en D-branen in de snaartheorie.

Afbeelding 2. Jean Écalle. Écalle bedacht de wiskunde van ‘resurgence’, waarmee niet-perturbatieve effecten in de natuurkunde goed beschreven kunnen worden.

Opmerkelijk genoeg blijken de twee hierboven beschreven kwesties twee kanten van dezelfde medaille te zijn: wanneer een machtreeks in de fysica divergeert, geeft dit aan dat er niet-perturbatieve effecten ontbreken. De wiskundige Jean Écalle was de eerste die op een precieze en rigoureuze manier uitlegde hoe deze twee aspecten van de storingsrekening samenhangen en, nog krachtiger, hoe je het divergeren van machtreeksen kunt benutten om de ontbrekende niet-perturbatieve effecten te vinden. Hij legde dit allemaal uit in zijn baanbrekende werk *Les Fonctions Résurgentes*. Deze theorie, algemeen bekend als *resurgence*, geeft natuurkundigen nieuwe middelen om niet-perturbatieve effecten in de natuurkunde te bestuderen, die voorheen ontoegankelijk waren. Het doel van mijn proefschrift is om de technieken uit Écalles resurgence te bestuderen, te verbeteren en te gebruiken om niet-perturbatieve aspecten van de natuurkunde te bestuderen.

Om dit te bereiken moet de machtreeks vervangen worden door iets algemeners: een zogenaamde *transreeks*. Een transreeks verenigt zowel perturbatieve als niet-perturbatieve bijdragen in een enkel object. We zagen in ons voorbeeld dat de storingsreeks een machtreeks in g was. Een transreeks kent naast machten in g ook machten in $e^{-A/g}$ of $\log(g)$, en is dus een veel ingewikkeldere reeks.

Interessante eigenschappen

Een van de meest interessante eigenschappen van de transreeks is Stokes' fenomeen, dat een centrale rol speelt in mijn proefschrift. Een belangrijk gevolg van Stokes' fenomeen is dat de vorm van de transreeks verandert. Om precies te zijn: sommige coëfficiënten x_n in de transreeks zijn geen constante getallen, maar zijn eigenlijk afhankelijk van een parameter σ (of meerdere parameters). Als Stokes' fenomeen optreedt, verandert de waarde van deze parameter, en daarmee de waarden van sommige coëfficiënten. Eén van de meest interessante en uitdagende aspecten van resurgence is het formuleren van de functie die ons vertelt hoe deze parameters precies veranderen als Stokes' fenomeen optreedt. In veel simpele gevallen is deze verandering niets anders dan het toevoegen van een constante:

$$\sigma \to \sigma+S_1.$$

Deze constante, S_1, heet de *Stokesconstante*, en de verzameling van alle Stokesconstantes in een gegeven probleem wordt de Stokesdata genoemd. Als Stokes' fenomeen ingewikkelder is dan het optellen van één enkele constante bij σ, kunnen we de verandering alsnog beschrijven door middel van Stokesconstanten, en dus is het verkrijgen van alle Stokesdata een belangrijk probleem bij de studie van niet-perturbatieve effecten. In mijn proefschrift bereken ik de Stokesdata voor een reeks verschillende problemen en beschrijven we een aantal interessante eigenschappen van deze getallen. Ik doe dit voor de zogeheten eerste Painlevé-differentiaalvergelijking, een belangrijke vergelijking in de wis- en natuurkunde, en voor een reeks quantummechanische modellen – zie over dat laatste onderwerp ook dit artikel.

Agbeelding 3. Een regenboog. Het licht aan de twee kanten van de regenboog heeft een heel andere intensiteit – een voorbeeld van Stokes' fenomeen!

Daarnaast beschrijf ik in mijn proefschrift hoe de Stokesdata in veel modellen een interessante relatie heeft met het fenomeen van *wall-crossing*: dit fenomeen beschrijft hoe sommige elementaire deeltje die stabiel zijn opeens instabiel worden als we aan de parameters van ons model draaien – of hoe sommige instabiele deeltjes plots stabiel worden. Er blijkt een diepe wiskundige relatie te bestaan tussen dit mechanisme en de Stokesdata van verschillende modellen, en in mijn proefschrift leggen we uit waar die relatie precies vandaan komt.

Wie geïnteresseerd is kan alles lezen over de details van het onderzoek in Alexanders proefschrift.

---

[1] Dit specifieke voorbeeld komt uit een gastcollege van de natuurkundige Carl Bender.