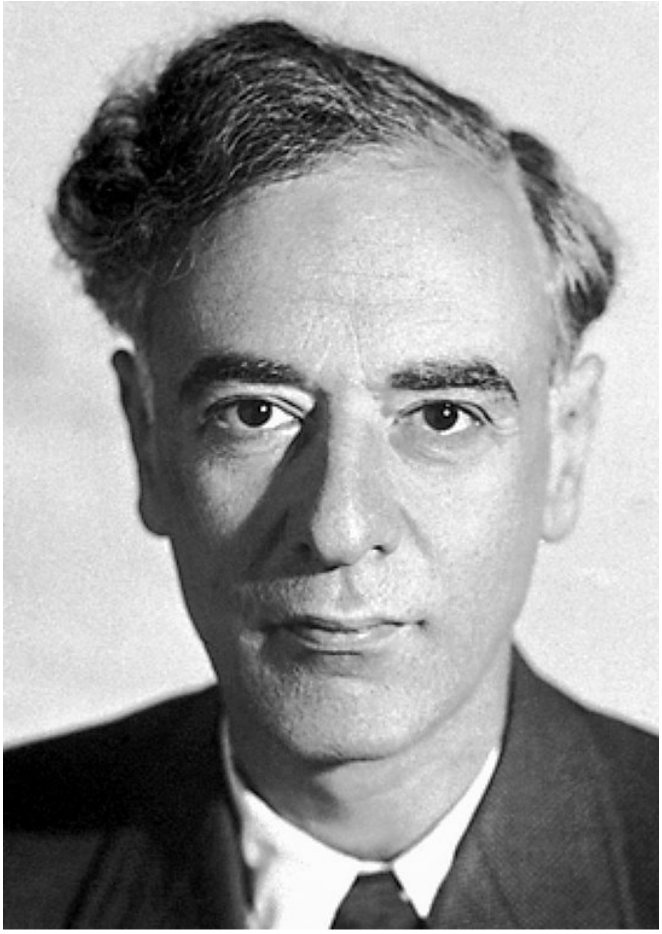
De droom van Lev Landau

Symmetrie ligt aan de basis van onze beschrijving van de natuur. Al sinds de oudheid is de mens erdoor gefascineerd, en nog altijd worden er nieuwe symmetrieën in de natuur ontdekt. Lev Landau, de bekendste Russische natuurkundige van de 20e eeuw, droomde ervan om ooit alle fases van materie (denk aan vast, vloeibaar, gasvormig) te classificeren aan de hand van enkel en alleen hun symmetrieën.[1] Deze droom leek tot voor kort niet te zullen uitkomen, vanwege exotische 'topologische' fases van materie. Onlangs hebben nieuwe en algemenere noties van symmetrie, verzameld onder de noemer *gegeneraliseerde symmetrieën*, de droom van Landau echter nieuw leven ingeblazen.



Afbeelding 1. Lev Landau. Foto: Nobelcomité.

Symmetrie op de ouderwetse manier

Symmetrieën zijn altijd onontbeerlijk geweest in de beschrijving van natuurkundige systemen. Dit heeft hoofdzakelijk drie redenen:

1. **Behoudswetten.** Een van de diepste stellingen in de natuurkunde is de stelling van Noether. Deze stelling zegt dat elke *behouden grootheid* hoort bij een *symmetrie* en vice versa. Zo hoort het behoud van impuls bij systemen die symmetrisch zijn onder verschuivingen, zoals een deeltje dat vrij door de ruimte beweegt. Op dezelfde manier hoort het behoud van energie bij systemen waarvan de wetten niet veranderen in de tijd. Lees in dit artikel op onze website meer over de stelling die Emmy Noether in 1915 bewees, en wat voor implicaties de stelling heeft in de natuurkunde.
2. **Wiskundige eenvoud.** Daarnaast maken symmetrieën het leven van de natuurkundige een stuk eenvoudiger, doordat ze vaak leiden tot versimpeling van de

wiskundige beschrijving van een systeem. Eugene Wigner, een bekende Hongaarse wiskundige uit de vorige eeuw, sprak ooit van de ‘onredelijke effectiviteit van wiskunde’ in de natuurkunde. Daarmee doelde hij vooral op de groepentheorie, de wiskundige formulering van symmetrieën. Ook in mijn eigen onderzoek ben ik regelmatig op zoek naar symmetrieën in wat ik bestudeer, omdat ze de berekeningen vaak aanzienlijk kunnen versimpelen.

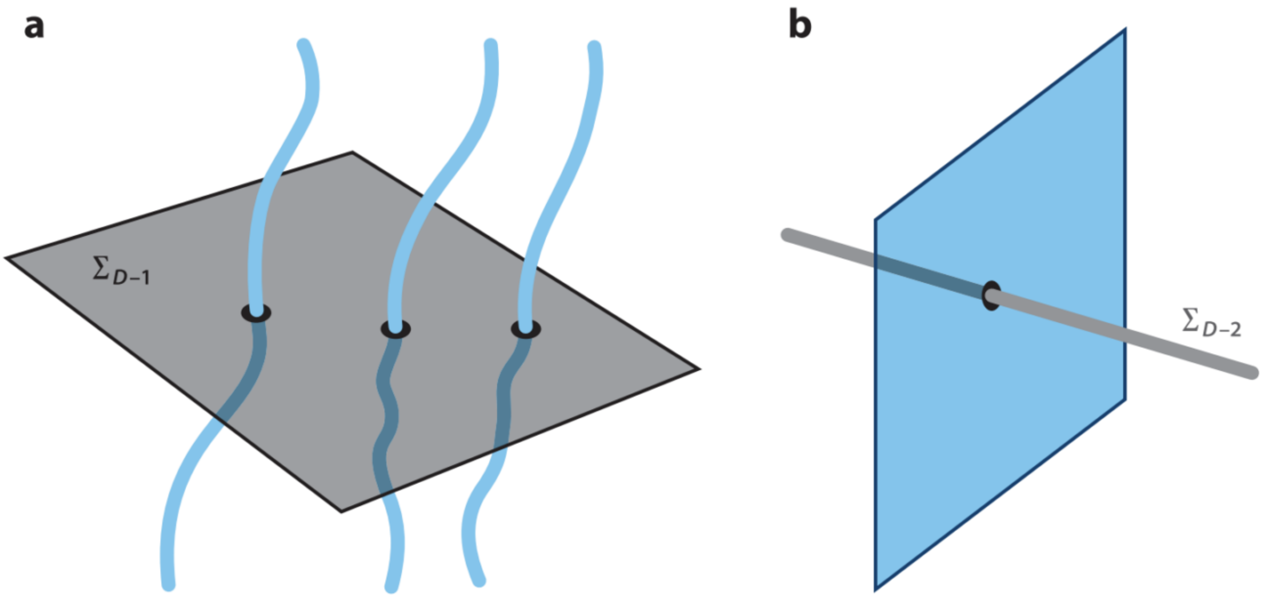
3. **De classificatie van fases van materie.** Ten slotte spelen symmetrieën een belangrijke rol in de classificatie van de verschillende fases waarin materie kan voorkomen. De droom van Landau, waar de titel van dit artikel naar verwijst, was om de fases waarin stoffen kunnen voorkomen volledig te beschrijven aan de hand van de aanwezige symmetrieën en de manieren waarop deze symmetrieën kunnen worden gebroken. Een simpel voorbeeld is de faseovergang van ijs naar vloeibaar water: een ijskristal heeft een regelmatige, symmetrische kristalstructuur, terwijl deze symmetrie wordt gebroken in de overgang naar vloeibaar water. Er zijn nog talloze andere, meer exotische fases van materie, zoals supergeleiding, die ook in Landaus op symmetrie gebaseerde paradigma passen.

Maar Landaus droom bleek niet helemaal uit te komen. Er zijn systemen, zoals systemen die het fractionele quantum-hall-effect vertonen, met fases die niet verklaard kunnen worden door conventionele symmetrieën en hun breking. In het afgelopen decennium is er veel aandacht geweest voor zulke systemen. Zo ging bijvoorbeeld de Nobelprijs voor de Natuurkunde in 2016 naar Thouless, Haldane en Kosterlitz voor de ontdekking van de zogeheten ‘topologische orde’ van exotische materialen. Maar Landaus droom is hiermee nog niet helemaal gebroken: in de afgelopen jaren is er een veel algemener begrip ontstaan over wat symmetrieën precies zijn. In dit meer algemene plaatje van symmetrie (dat van de zogeheten ‘generalized symmetries’) passen óók de exotische fases van materie die eerder buiten de boot vielen.

Gegeneraliseerde symmetrie

In een artikel uit 2014 introduceerden Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg en Brian Willett het idee van gegeneraliseerde symmetrie. Ook nu wordt dit artikel nog vaak geciteerd en heeft het idee al talloze successen geboekt door bij te dragen aan ons begrip van wat symmetrie precies is. Aangezien de precieze definitie nogal technisch is, zal ik in dit artikel één type gegeneraliseerde symmetrie uitlichten die betrekkelijk makkelijk te begrijpen is. Dit type heet ‘hogere-vorm-symmetrie’. Kort gezegd zijn ‘hogere-vorm-symmetrieën’ de symmetrieën die de behoudswetten beschrijven van ladingen op hoger-dimensionale objecten. Om die zin te begrijpen moeten we eerst weten wat we bedoelen met een gewone (‘nul-vorm-’) symmetrie.

- **Nul-vorm-symmetrie.** Zoals eerder gezegd hoort bij iedere symmetrie een behouden grootheid. Een illustratief voorbeeld hiervan is elektrische lading. In een systeem dat aan Maxwells wetten van het elektromagnetisme voldoet is de totale lading een behouden grootheid. Deze lading wordt ‘gedragen’ door een elektron – met andere woorden: een elektron is elektrisch geladen. Een versimpelde beschrijving van een elektron is dus als een *punt* in de ruimte met een negatieve elektrische lading *die behouden blijft*. Een punt dat in de loop van de tijd beweegt kun je tekenen als een lijn: deze lijn heet de *wereldlijn* van het puntdeeltje. Dit zie je weergegeven als de blauwe strengen in afbeelding 2a. Als er meerdere puntdeeltjes zijn (en dus: een elektrische stroom) dan is de totale lading de som van de puntladingen in een bepaald volume.



A**fbeelding 2. 0-vorm-symmetrie versus 1-vorm-symmetrie.** In deze tekening loopt de tijdsas van onder naar boven, en zien we twee ruimtelijke dimensies in het x-y vlak. In figuur a) is een aantal wereldlijnen van puntdeeltjes getekend. De totale lading wordt op een tijdstip gemeten door het aantal blauwe lijnen te tellen dat door het grijze vlak beweegt. Het maakt niet uit op welk tijdstip je dit meet, want de totale lading is een behouden grootheid. In figuur b) is een wereldblad (blauw) getekend van een geladen lijnstuk. De flux wordt gemeten door het lijnstuk te omsluiten met een oppervlak (in deze tekening de grijze lijn). Bron: McGreevy.

- **Eén-vorm-symmetrie.** Laten we bovenstaande paragraaf veralgemeniseren naar één dimensie hoger. In plaats van een geladen puntdeeltje bekijken we nu een elektrisch geladen lijn(stuk). De behouden grootheid die deze lijn ‘draagt’ is nu niet de elektrische lading maar de elektrische flux. Waar we de lading van puntdeeltjes in een volume maten, meten we nu de elektrische flux door de dichtheid van veldlijnen te tellen door een De geladen lijn, bewegend in de tijd, beschrijft nu niet een wereldlijn maar een wereldblad (in het Engels: *worldsheet*). Dit wereldblad is het blauwe vlak in figuur 1b. Het oppervlak waardoor we de dichtheid van veldlijnen meten is in de figuur getekend als een grijze lijn.
- **Hogere-vorm-symmetrie.** Zo kunnen we blijven doorgaan: in plaats van een geladen punt of lijn, bekijken we geladen vlakken, volumes en hoger-dimensionale objecten in een meerdimensionale ruimte. Laten we ruimte-tijddimensie *D* noemen, en de dimensie van het geladen object *p*. Dan wordt de lading van een puntdeeltje (*p=0*) gemeten door een (*D-1)*-dimensionaal object (het grijze vlak in figuur 1a), die van een een lijn (*p=1)* door een (*D-2)*-dimensionaal object, enzovoort. In het algemeen wordt een *p*-vorm-symmetrie gedragen door een *p*-dimensionaal object, en wordt de lading van dit object gemeten door een (*D-p-1)*-dimensionaal object.

Wat ik hierboven heb beschreven gold voor elektrische ladingen, maar het is evengoed toepasbaar op alle andere behouden grootheden, zoals magnetische lading, spin, impuls, baryongetal, et cetera. Al deze behouden grootheden kunnen we zien als ‘ladingen’ die gedragen worden door *p*-dimensionale objecten. Twee bekende voorbeelden van 1-vorm-symmetrieën zijn de ’t Hooftlus, een magnetisch geladen lus, en de Wilsonlus, ook wel ‘flux tube’ genoemd, die geladen is onder de sterke kernkracht en een quark verbindt met een anti-quark. Andere toepassingen van 1-vorm-symmetrie zijn een verklaring voor het feit dat het foton (het lichtdeeltje) massaloos is[2], en een beter begrip van het quantum-hall-effect in termen van symmetriebreking.[3]

De kracht van de veralgemenisering

Het mooie van het idee van Gaiotto, Kapustin, Seiberg en Willett en al het onderzoek dat daaruit voortvloeide, is dat het niet alleen veel bekende eigenschappen van symmetrieën in één raamwerk bijeen heeft gebracht, maar daarmee ook nieuwe structuren heeft blootgelegd. Door symmetrie te vatten in een algemener formalisme bleken er nog veel meer gegeneraliseerde symmetrieën mogelijk te zijn. Hierboven besprak ik het voorbeeld van hogere-vorm-symmetrieën. Een ander voorbeeld is de 'niet-inverteerbare symmetrie'. Dit is een mogelijke symmetrie van quantumsystemen, waarbij het systeem zich wel ontwikkelt volgens een behoudswet, maar daarna niet meer terug in oorspronkelijke toestand kan komen, bijvoorbeeld doordat het in een quantumsuperpositie is geraakt. Een ander voorbeeld is een 'discrete ijksymmetrie', waarbij ieder punt in de ruimtetijd lokaal de symmetriegroep van een veelhoek heeft.

Bovendien lijkt dit nog maar het topje van de ijsberg: de hoeveelheid nieuwe, algemenere symmetrieën groeit met de dag. Letterlijk: bijna iedere dag zie ik op het Arxiv, waar de nieuwe artikelen in ons vakgebied dagelijks op verschijnen, wel een artikel langskomen dat over gegeneraliseerde symmetrieën gaat. De belofte is dan ook groot: zal het ooit mogelijk zijn om alle fases van materie, hoe exotisch die ook mogen zijn, te beschrijven met gegeneraliseerde symmetrieën? Dan zou Landau's droom, of beter gezegd, zijn gegeneraliseerde droom, toch nog uitkomen.

---

[1] In Landaus classificatie wordt ook een grote rol gespeeld door de vraag welke symmetrieën *gebroken* zijn. Zie voor een goed artikel over symmetriebreking dit artikel op deze website.

[2] De reden is dat het foton een *Goldstoneboson* is voor de gebroken elektrische en magnetische 1-vorm-symmetrie. Goldstonebosonen zijn altijd massaloze excitaties, en daarom is het foton ook massaloos.

[3] In het geval van het fractionele quantum-hall-effect is de 1-vorm-symmetrie die wordt gebroken niet een continue symmetrie, maar een discrete symmetrie. Een voorbeeld van een discrete symmetrie is spiegeling in een as, of het draaien van een veelhoek.